UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FACULDADE DE FILOSOFIA, CIÊNCIAS E LETRAS

Boletim CLXII | Psicologia n.º 4

F. M. URBAN

Métodos Estatísticos em Psicologia

★

SÃO PAULO — BRASIL

1952

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FACULDADE DE FILOSOFIA, CIÊNCIAS E LETRAS

Tôda correspondência relativa ao presente Boletim e as publicações em permuta deverão ser dirigidas à

All correspondence relating to the present Bulletin as well as exchange publications should be addressed to

CADEIRA DE PSICOLOGIA

Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras
Universidade de São Paulo

Caixa Postal 8.105 — São Paulo — Brasil

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FACULDADE DE FILOSOFIA, CIÊNCIAS E LETRAS

Boletim CLXII — Psicologia n.º 4

F. M. URBAN

Métodos Estatísticos em Psicologia

★

SÃO PAULO — BRASIL

1952

F. M. URBAN

Métodos Estatísticos em Psicologia

★

SÃO PAULO — BRASIL

1952

PREFÁCIO

Constituindo o quarto Boletim da série que a cadeira de Psicologia vem publicando, apresentamos as lições de um curso sobre métodos estatísticos em Psicologia, de autoria do Prof. Fredrick-Marie Urban, que tivemos a honra de receber como professor-visitante durante o primeiro semestre de 1951. Paralelamente a este curso, deu o ilustre visitante um outro, teórico e prático, sobre psicologia experimental.

* * *

Não nos deteremos em salientar a dedicação ao trabalho e a afabilidade de trato do Prof. Urban. Da primeira, este Boletim já é um indicio bastante significativo, pois demonstra haver ele escrito especialmente para nossos alunos todas as aulas que proferiu, o que vem permitir agora que outros possam beneficiar-se delas na presente forma. Da segunda, todos os que com ele conviveram em nossa Faculdade dão testemunho unânime, guardando a lembrança de um grande mestre cujo ensinamento conclusivo deste trabalho, referente à formação de uma mentalidade não-emocional para evitar os erros de observação, se era exemplarmente posto em prática no trato dos fatos estudados, não impedia que às pessoas dos estudantes dedicasse ele calorosa simpatia, mal velada por impecavel "gentlemanliness".

* * *

Da personalidade científica do Professor, haveria muito mais que dizer do que pode comportar este prefácio. Nascido em Brünn (então pertencente ao império austriaco, atualmente à Checoslovaquia) em 1878, apenas um ano antes da fundação do laboratório de Wundt em Leipzig, F. M. Urban alcançou sua idade universitaria quando aquele famoso laboratório se tinha tornado a Meca dos psicólogos. Tendo estudado em Viena, com F. Jodl, aí se doutorou. A conselho de Jodl, foi tambem estudar em Leipzig com Wundt.

Em 1902 dirigiu-se para os Estados Unidos, onde já tivera começo a tradição de oferecer — com a proliferação de cadeiras de Psicologia em velhas e novas universidades — oportunidades a especialistas europeus, tanto quanto aos jovens especialistas do país, ávidos de autonomia científica. Trabalhou primeiro em Harvard, onde em 1904 deu um curso sobre psicologia experimental. Depois, durante cerca de dez anos, foi professor na Universidade de Pensilvania, em Filadelfia, onde ensinou e dirigiu pesquisas de candidatos a doutoramento. (Um de seus discípulos mais eminentes, S. W. Fernberger, é hoje o chefe do departamento de Psicologia da mesma universidade.)

Depois da primeira Grande Guerra voltou à terra natal, havendo posteriormente lecionado em varias universidades européias. Seu último contrato antes de vir residir temporariamente no Brasil, foi na Universidade de Oslo, na Noruega, em 1947, havendo deixado novamente a Checoslovaquia após as modificações políticas subsequentes à última guerra.

É autor de mais de 100 publicações, algumas das quais escritas no Brasil. Seu livro sobre o cálculo de probabilidades ("Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der Theorie der Beobachtungsfehler" — 1923) é um clássico no assunto.

Sua vinda ao Brasil e a S. Paulo veio possibilitar nosso convite para que o Prof. Urban ministrasse cursos de sua especialidade junto à cadeira de Psicologia. Pôde assim nossa Faculdade beneficiar-se da feliz circunstância de contar durante algum tempo com os ensinamentos de quem, tendo estado ligado aos mais notaveis trabalhos da psicologia experimental do século passado e dado importantes contribuições no campo da psicofísica, está hoje integrado em movimentos psicológicos dos mais modernos, quais sejam as correntes de Thurstone e de Clark Hull. O néo-behaviorismo de Hull representa, a nosso ver, talvez a mais séria contribuição norte-americana à sistemática psicológica. Destas idéias, aliás, foi aqui o Prof. Urban o primeiro divulgador, num curso de conferencias que lhe solicitámos, quando na direção da Sociedade de Psicologia de S. Paulo, em 1950.

A despeito das divergencias históricas entre o behaviorismo e a psicologia experimental do passado, há *profundas afinidades metodológicas entre o néo-behaviorismo e a psicofísica. A evolução das idéias de F. M. Urban mantem, na verdade, uma linha de grande coerencia. Seu traço distintivo e permanente é a busca do rigor metodológico — não apenas no processamento experimental, mas tambem na elaboração dos dados obtidos atravez da manipulação experimental.*

* * *

A estatística é um instrumento de elaboração dos dados psicológicos. O método estatístico não só é util, como, em muitos casos, os psicólogos não veem outra escolha possivel, tendendo muitos, mesmo, a identificar método científico e método estatístico.

Crendo que, na situação atual dos estudos psicológicos em nosso meio, é de primeira necessidade dar aos estudantes uma visão em profundidade das alternativas que a Psicologia defronta, pensámos que ninguem melhor que o Prof. Urban para dar a nossos alunos, as noções que são o fundamento lógico do pensamento estatístico em Psicologia. As noções de acaso e probabilidade, a teoria de classes e do acaso lógico, a teoria dos erros de observação, são aqui expostas e analisadas por mão de mestre, a qual se revela pelo simples fato de esses assuntos, reputados áridos e difíceis, serem aqui apresentados de modo a poderem ser aprendidos "sem fórmulas nem lágrimas", como era mister que fossem num currículo de estudos filosóficos como o desta Faculdade, em que a matemática e a estatística estão ausentes.

Assim, ao lado do curso de psicologia experimental em que as técnicas psicológicas e estatísticas foram por ele ensinadas para fins de direta aplicação aos fatos, pedimos-lhe este outro, antes lógico que processual. Parece-nos que entre os psicólogos — aqui como alhures — o aspecto processual tem recebido mais destaque que o propriamente lógico. Nestas condições, é para nós motivo de satisfação poder, mediante este Boletim, oferecer aos leitores a oportunidade de — com as lições do eminente Professor F. M. Urban, que é autoridade em ambos os aspectos da questão — considerar o lado menos posto em relevo pelos psicólogos.

ANNITA DE CASTILHO E MARCONDES CABRAL

São Paulo, Dezembro de 1952

ÍNDICE DE MATÉRIAS

Cap. 7 — O calculo de probabilidade e o teorema de Bernoulli

Cap. 8 — Estatística

Cap. 9 — Teoria dos erros de observação

FIGURAS

INTRODUÇÃO

Atualmente não subsistem mais dúvidas quanto ao valor prático da psicologia. Esta ciência já provou sua utilidade através das inúmeras aplicações na indústria pacífica e nas duas últimas guerras um grande número de psicólogos especializados desenvolveu sua atividade profissional junto às forças armadas dos Estados Unidos. Atualmente muitos psicólogos dentre os mais conhecidos firmaram contrato com o governo para trabalhar na solução de alguns dos problemas eminentemente práticos do exército, da marinha e da força aérea.

Tal êxito prático torna mais urgente que nunca considerar a posição teórica desta ciência, pois as teorias são o fundamento sobre o qual se ergue a superestrutura das aplicações práticas. Deixando de parte, por enquanto, o fato de que milhões e milhões de dólares são economizados anualmente graças aos conselhos técnicos dos psicólogos, gostariamos de saber quais os motivos que levam tantos homens e mulheres a devotar a totalidade dos seus esforços ao estudo da Psicologia. A resposta mais obvia é que esses problemas são extremamente fascinantes, pois se existe no mundo alguma coisa interessante, deve ser o nosso proprio espírito. A resposta é correta, mas não penetra no âmago da questão. Esses problemas existiam antes do advento da psicologia experimental e, entretanto, não foram capazes de provocar a intensa atividade que observamos hoje.

A posição de uma ciência é determinada pelos problemas que estuda e pelos métodos que emprega para resolve-los. O problema central da Psicologia é o comportamento do homem. Os seus métodos são experimentais e os resultados são submetidos a um tratamento estatístico. O campo de pesquisa, definido nestes termos, é amplo, mas tem limites bem definidos. Temos liberdade de investigar qualquer problema que a experiencia real nos ofereça, mas não nos devemos intrometer em coisa alguma que ultrapasse esses limites.

A estatística — e com ela a psicologia experimental — emprega as noções de acaso e de probabilidade. Estas noções receberam, no decorrer das últimas décadas, uma interpretação que promete ser definitiva. Apresentarei essa solução juntamente com um esboço do histórico do problema. Acaso e probabilidade são expressões que fazem parte do acervo de palavras que usamos na vida quotidiana e teem suas origens nas experiencias comuns, de que todos nós compartilhamos. Na linguagem comum estas palavras teem vários significados, bastante diversos. Mas pessoas de inteligencia aguda logo perceberam as incoerencias do uso dessas palavras e procuraram evita-las atribuindo a esses vocábulos um sentido bem determinado. Esses esforços resultaram no que se pode chamar a doutrina filosófica do acaso. Muitas doutrinas desse gênero teem sido elaboradas no decorrer do tempo, mas somente uma delas, a chamada concepção lógica do acaso, é coerente e não entra em contradição com os nossos pontos de vista gerais. A concepção lógica do acaso provou ser a verdadeira base do cálculo de probabilidade.

A origem do cálculo de probabilidade nada tem de muito elevado. O seu primeiro problema nada tinha que ver com especulações filosóficas: surgiu da observação de jogadores contumazes, os quais notaram que, no jogo dos dados, podiam apostar com vantagem em determinadas combinações mas não em outras que, segundo todas as aparencias, eram igualmente plausiveis. Por muito tempo o cálculo da probabilidade ficou circunscrito à análise dos jogos de azar e só no inicio do século passado Laplace julgou necessário enumerar os problemas práticos que poderiam ser abordados por essa fórma.

Atualmente não há necessidade de convencer o prático homem de negocios do valor da probabilidade. Os bilhões empatados em seguros de vida são um argumento convincente. As pessoas que possuem pendor para as especulações teóricas, por outro lado, impressionam-se com a variedade de problemas que podem ser resolvidos pelo cálculo de probabilidade. Estendem-se por todo o campo de conhecimento, começando com a teoria dos números e a geometria, passando pela mineralogia e pela física, indo até a biologia, a sociologia e a psicologia. A teoria dos erros de mensuração pouco mais é que uma série de proposições deduzidas de algumas suposições muito simples, mas capacita-nos para encontrar os valores de quantidades empíricas partindo de observações discordantes, bem como para determinar o grau de exatidão das nossas medidas. E' neste ponto que a teoria da mensuração e a psicologia se encontram e está provado que a observação de quantidades empíricas, levada a efeito com instrumentos de diferentes graus de precisão, guardam entre si relações idênticas às que apresentariam se tivessem sido feitas com orgãos dos sentidos de sensibilidades diversas. Creio que a introdução do raciocinio matemático na biologia e na psicologia é uma das mais importantes conquistas dos últimos tempos.

Frequentemente ouvimos argumentar que o cálculo de probabilidade é um dos ramos mais abstrusos e dificeis da alta matemática. Esse ponto de vista não é correto, embora existam alguns trabalhos que poderiam ser apontados como prova dessa tese. O aluno facilmente pode dominar a técnica de uso das fórmulas e logo se sente confiante na propria capacidade. De fato, o raciocinio é tão simples que o cálculo de probabilidade frequentemente é incluido na matemática elementar. Há uma única dificuldade, que consiste em verificar quais os campos em que a noção de probabilidade pode ser usada com êxito. Mas essa dificuldade é tarefa do investigador, não do principiante. Para vence-la é necessário conhecer intimamente os problemas a serem resolvidos e isto só se obtem por meio de um cuidadoso estudo dos fatos.

A probabilidade nos deve servir de guia sempre que tratarmos de acontecimentos que não podemos prever. Entretanto, nem todos os acontecimentos imprevisiveis se prestam a um tratamento pelo cálculo de probabilidade. As fórmulas deste não são uma especie de mágica, por meio da qual extraimos conhecimento da ignorancia. Para obter êxito precisamos possuir fatos e uma ideia que os represente. Esta ideia não é de natureza matemática, mas tem suas origens no julgamento correto do curso da natureza. Assim, o cálculo da probabilidade fornece apenas a roupagem que deve revestir um corpo de pensamento. Neste curso falaremos principalmente desse corpo de pensamento e faremos referencia à roupagem somente quando fôr indispensavel.

Capítulo I

DO ACASO

1) Acontecimentos fortúitos e probabilidades. — As palavras "Acaso" e "Probabilidade" são livremente usadas na linguagem diária e aceitas como se o seu significado fosse inteiramente claro. O uso comum parece fazer a seguinte distinção: o acaso é um atributo dos acontecimentos objetivos, enquanto que a probabilidade é um atributo das nossas opiniões sobre os primeiros. Esta distinção não é estritamente mantida e as duas palavras são usadas para significar coisas muito diferentes. Acontece frequentemente que um mesmo autor, em diferentes contextos, atribue a estas palavras sentidos diversos e estas várias definições diferentes de acaso e probabilidade dificilmente dão a impressão de que os autores se estão referindo às mesmas coisas.

Passarei agora a examinar os acontecimentos que, de acôrdo com o uso comum, são chamados fortúitos. Os acontecimentos são clasificados como devidos ao acaso quando estão presentes certos atributos, mas não existe um atributo ou qualidade que esteja presente em todos os acontecimentos casuais. Isto explica o fracasso de todos os esforços para encontrar um atributo cuja presença caracterize um acontecimento como fortúito. Muitas vezes a questão de saber se um acontecimento é ou não devido ao acaso tem consequencias práticas importantes e por essa razão o interesse pelo significado da palavra "acaso" nunca poderá diminuir. Os acontecimentos comumente atribuidos ao acaso e chamados acidentais ou fortúitos podem ser divididos em 5 grupos, convenientemente indicados pelos seguintes títulos: 1) Acontecimentos raros ou extraordinários. 2) Pequenas causas, grandes efeitos. 3) Coincidencias temporais ou espaciais de acontecimentos independentes. 4) Interferencias dos acontecimentos no curso das ações planejadas. 5) Acontecimentos sem causa ou imprevisíveis.

2) Acontecimentos raros ou extraordinários. — Os acontecimentos que sucedem raramente são considerados como devidos ao acaso. Quando nos referimos a acaso maior ou menor, aludimos à frequencia com que esse acontecimento é verificado. Quanto mais raro o acontecimento, menor a posibilidade de que se venha a verificar. Na linguagem comum, a experiencia na qual baseamos o julgamento do carater extraordinário do acontecimento não é especificada e isto pode levar a variações de opinião quanto ao carater fortúito do acontecimento. No seguinte exemplo, não subsiste dúvida alguma quanto ao carater extraordinário do acontecimento. O tenente Charles S. Ripley, da Marinha Norte Americana, naufragou perto de Samôa, nadou para a praia e foi saudado como primo pelo chefe Malietao. O tio-avô de Ripley, que tambem naufragara e fôra salvo da mesma maneira, havia desposado a filha do chefe local e fundado uma familia. Este caso nos impressiona pelos seus traços fora do comum. Se Ripley tivesse encontrado um primo após haver encalhado na costa da Nova Inglaterra, a sua experiencia seria muito menos extraordinária e poderia ser considerada como uma das pequenas peças que frequentemente nos prega o acaso.

A colisão de dois navios em alto mar é considerada como um acontecimento fortúito e julgaremos um acidente dessa especie de maneira diferente se ele tiver acontecido em uma das rotas marítimas ou em uma parte deserta do Oceano. O nosso julgamento relativamente ao carater fortúito de tais acontecimentos não é influenciado pelo fato de termos ou não conhecimento do curso de acontecimentos que levou ao acidente. O ponto decisivo é a raridade dos acontecimentos, não a falta de compreensão ou informação quanto às condições. Podemos ter informações completas quanto aos fatos que colocaram os dois navios nessa posição fatal. O nosso conhecimento da concatenação dos fatos que resultaram na catástrofe pode ser completo mas, de acôrdo com o uso comum, ainda a atribuiremos ao acaso.

Isto pode ser ilustrado pelo seguinte exemplo. Na catástrofe do vapor "Luise Leonhard", o primeiro elo da cadeia de acontecimentos que resultou na perda total do navio e da sua carga, bem como na morte de 30 homens da tripulação, foi o rompimento da corrente do leme. As âncoras tiveram que ser lançadas durante uma tempestade, mas as suas correntes, sem o auxilio do leme, não resistiram à pressão das ondas e isto eventualmente levou à perda do navio. Considerando o estado do vapor, o seu destino estava selado desde o momento em que deparou com a tempestade. Não obstante, a perda do navio foi considerada como um acontecimento casual, como prova o fato de que a companhia de seguros teve que pagar uma indenisação.

No mesmo sentido aludimos ao acaso quando, no jogo da roleta, a mesma côr, o vermelho, por ex., aparece muitas vezes sucessivamente e julgamos o acaso conforme o número de repetições. Este acontecimento é um composto de certo número de acontecimentos individuais, cada um dos quais é para nós incontrolavel e imprevisivel. Não possuimos informação alguma quanto às condições que produzem tal série de repetições e mesmo o resultado de uma única rodada é imprevisivel. Estes dois exemplos tomados em conjunto provam que a falta de conhecimento quanto ao curso dos acontecimentos não é um requisito para afirmar a existencia do carater casual. O nosso julgamento se baseia inteiramente sobre a raridade e o carater extraordinário dos acontecimentos.

O significado das palavras acaso e raridade não coincidem. Quando falamos em plantas raras, ou em animais ou metais raros, etc., não podemos substituir raro por fortúito. Estamos habituados a encontrar esses especimens em determinados lugares, mas deparar com eles em um lugar inesperado é acaso. A palavra acaso aqui se refere às coisas com as quais estamos familiarizados. Esperamos que apresentem certas qualidades e ficamos surpreendidos quando as encontramos diferentes. Neste sentido consideramos as anormalidades das fórmas humanas ou animais, pedras ou árvores que se assemelham a outras fórmas, etc., como produtos do acaso. Isto corresponde ao espírito da nossa linguagem, mesmo quando temos perfeito conhecimento das causas e compreendemos que, dentro das condições dadas, nenhuma outra fórma poderia ter sido produzida. Na maioria destes casos é impossivel avaliar o acaso, pois não podemos medir a raridade dos acontecimentos. Temos que julgar pela fidelidade da reprodução e pelo grau de complicação da fórma imitada, fatos ambos inaccessiveis a uma avaliação exata.

Julgar a extensão do acaso pela raridade do acontecimento, depende de fatores individuais e essa avaliação é raramente levada a efeito de maneira mecânica como no exemplo das repetições no jogo da roleta. Se percebermos no acontecimento algumas peculiaridades que aumentam o seu carater extraordinário, a nossa surpreza cresce e assim faz tambem a nossa impressão da extensão do acaso implicado.

É sem dúvida extraordinário que em uma loteria que joga com cem mil números, o grande premio tenha saído duas vezes para o mesmo número. Isto aconteceu à loteria prussiana, com o número 39.093. A nossa surpreza aumentará se notarmos que este número dá o mesmo resultado quer seja lido da direita para a esquerda, ou da esquerda para a direita. Uma pessoa não iniciada nas pequenas tricas do cálculo de probabilidade, achará dificil avaliar o acaso envolvido em tais acontecimentos. Ficará surpreendida ao saber que a possibilidade de que um dos números saia duas vezes é igual à possibilidade de que saia um número determinado. Somos tambem levados a superestimar a raridade dos números de 5 algarismos que dão o mesmo resultado quer lidos da direita para a esquerda, quer da esquerda para a direita. Entre os números de cinco algarismos, há tantos que podem ser lidos nas duas direções sem mudar de valor quantos múltiplos de 100.

Há uma diferença psicológica importante entre as percepções destas duas qualidades de um número. Ninguem pode deixar de perceber a divisibilidade por 100 em razão dos zeros nas duas últimas casas. Não se pode deixar de notar, da mesma forma, que uma série de algarismos dá o mesmo resultado quando lida nas duas direções, mas não é certo que se faça isso. A ideia de ler um número partindo da direita não ocorre a todos. Muitas pessoas são por demais indiferentes para fazê-lo. Não estão suficientemente interessadas para olhar duas vezes um número que lhes é apresentado.

O julgamento relativo às propriedades extraordinárias de um número depende do interesse individual por números. O mesmo, naturalmente, é verdadeiro em relação a todos os outros acontecimentos em que o especialista é capaz de reconhecer qualidades extraordinárias que escapam ao leigo. O seguinte ponto é importante. Qualquer objeto ou acontecimento que pertence a um grupo especificado, possue um número indefinido de outras propriedades não especificadas. A prontidão com que estas qualidades não especificadas são percebidas depende das qualidades psicológicas do sujeito. No caso dos números, podemos considerar como extraordinários os números pares ou ímpares, primos, quadrados, cubos e outras potencias, números com divisores quadráticos e assim por diante, de maneira que no fim dificilmente sobrará algum número que não seja notavel ou extraordinario por este ou por aquele motivo. O julgamento relativo às qualidades extraordinárias de um objeto ou acontecimento contem um fator subjetivo. Vou ilustrar esta afirmação com o seguinte exemplo.

Se virmos no número 1729 somente uma data histórica de pequena importancia, dificilmente o consideraremos particularmente interessante. A situação não se altera muito se notarmos que 1729 é o produto de tres números primos relativamente grandes. Mas se soubermos que 1729 é o menor número que pode ser representado de duas maneiras diferentes como a soma de dois cubos

$$1729 = 1000 + 729 = 10^3 + 9^3$$
$$1729 = 1728 + 1 = 12^3 + 1^3$$

não hesitaremos em considerá-lo como realmente extraordinario. As pessoas que não teem um interesse muito ativo pelos números dificilmente perceberão esta propriedade do número 1729, mas a historia mostra que esta propriedade penetra na conciencia do especialista tão depressa, digamos, como a divisibilidade por 100 é percebida pelo homem comum.

Parece mais facil identificar o carater extraordinário em séries de letras ou de palavras. Uma série de letras apanhadas ao acaso parecerá extraordinária se fôr legivel ou, mais ainda, se formar uma palavra de sentido definido. Estes criterios não são absolutos, pois a legibilidade de uma série de letras não é a mesma em linguas diferentes e a identificação do sentido de uma série de letras depende da instrução de que o sujeito dispuser.

Uma urna contem 9 pedacinhos de papel, em cada um dos quais foi escrita uma das letras: B, E, I, L, L, N, O, R, U. Tiramos os papeizinhos um a um e obtemos a série: BERNOULLI. A nossa surpreza e, correspondentemente, a nossa opinião quanto ao carater extraordinário do resultado será diferente se virmos aí somente uma série legivel de letras, ou se identificarmos o nome de um dos mais profundos pensadores da teoria da probabilidade.

Da mesma fórma considerariamos extraordinário se, ao tirarmos de uma urna, um a um, oito papeizinhos contendo cada um uma palavra latina, obtivéssemos como resultado uma sentença gramaticalmente correta e de sentido claro. A nossa surpresa aumentaria se a série fosse um hexâmetro. Isto pressupõe que não possuimos mais nenhuma informação sobre as palavras em questão. Mas se soubermos que elas pertencem a um daqueles grupos que, seja qual fôr a ordem das palavras, resultam sempre em um hexâmetro com sentido, cuja elaboração constituia um divertimento para Bernard Bauhuis, o resultado perde muito da sua qualidade surpreendente. Se tivermos que jogar com a sentença: "Tob tibi sunt dotes, virgo, quot sidera coelo" (Possues tantas virtudes, Virgem Santíssima, quantas são as estrelas do céu) que, segundo Bauhuis podem-se formar duas mil e vinte sentenças sem alterar o sentido e sempre em hexâmetros, o aparecimento de um hexâmetro com sentido poderia ser considerado como notavel, uma vez que o número de tais séries não é muito grande quando comparado com o número total de resultados possiveis. A capacidade de julgar se uma determinada série de palavras representa um hexâmetro correto, evidentemente depende dos conhecimentos do leitor relativamente à linguagem e devemos confessar que muitos dos versos de Bauhuis são uma dolorosa prova para a paciencia.

O acaso, nestes exemplos, consiste na relativa raridade das séries que produzem um hexâmetro com sentido. Não aludimos a acaso quando qualquer ordem possivel das palavras pode resultar em um verso desse tipo. Bauhuis conseguiu encontrar tais grupos de palavras e sentimo-nos felizes por estarmos capacitados a citar o número de hexâmetros possiveis sem que sejamos obrigados a ler realmente os versos.

O traço característico deste tipo de acontecimentos casuais é que atraem o nosso interesse em razão de uma propriedade qualquer que possuem e são raros quando comparados com o número de acontecimentos desinteressantes. Ao dar as cartas no jogo de bridge, qualquer distribuição é exatamente tão provável quanto qualquer outra. Algumas delas são interessantes em razão das suas consequencias para ganhar ou perder e os amadores deste e de outros jogos não deixam de registrar tais ocorrencias, como por exemplo o fato de um jogador receber as 13 cartas de um naipe, ou a peculiar distribuição de cartas conhecida como jogo do Duque de Cumberland. É difícil obter informações fidedignas relativamente a todos os acontecimentos raros desta espécie, pois temos que confiar nos relatos de pessoas das quais podemos dizer que a fria exposição dos fatos não é o seu forte. O famoso perito em bridge Ely Culbertson tentou uma vez obter informações quanto à frequencia real de mãos que: a) contivessem as 13 cartas de um naipe e b) contivessem as cartas mais baixas do baralho na seguinte distribuição: 4:3:3:3. Ambas as mãos apresentam a mesma probabilidade. Mas 70 correspondentes de Culbertson relataram mãos do tipo "a" e somente um fez referencia à do tipo "b". Os jornais frequentemente trazem noticias relativas a acontecimentos raros, mas é prudente não confiar muito neles.

3) **Pequenas causas, grandes efeitos.** — Há acontecimentos nos quais percebemos uma falta de proporção entre a exiguidade da causa e o efeito por ela produzido. Não há dúvida quanto à conexão necessária entre causa e efeito, pois o interesse desses casos consiste inteiramente em demonstrar esta conexão. O característico distintivo deste tipo de acontecimentos casuais consiste no fato de que um objeto ou fato que habitualmente não possue interesse ou consequencia, pode, sob certas condições, assumir uma importancia inesperada. Consideramos acontecimentos desta natureza como devidos ao acaso, porque são excepcionais e raros.

A descrição de tais acontecimentos, quando feita por um escritor competente, é sempre interessante e atraente. Lembrem-se das famosas considerações sobre o grão de areia existente na bexiga de Cromwell, ou pensem na descrição feita por Zola da doença de Napoleão III e da queda do seu Imperio. Habitualmente um grão de areia é um objeto sem importancia e sem influencia sobre acontecimentos da menor relevancia. O grão de areia nas vias urinárias de Cromwell, entretanto, teve um efeito direto e facilmente perceptivel sobre a saúde e a energia do chefe do governo e exerceu uma influencia dificil de avaliar.

O que nos excita a imaginação é a raridade e o característico excepcional da cadeia de acontecimentos. A exiguidade da causa relativamente ao efeito produzido consiste no fato de que um certo objeto ou grupo de condições é encontrado com muita frequencia, mas não exerce qualquer influencia perceptiva sobre o curso dos acontecimentos. Aludimos a acaso quando, algumas vezes, tal objeto tem uma influencia evidente sobre acontecimentos relevantes. Assim, é sobre a raridade que baseamos nosso julgamento e não sobre a falta de proporção entre causa e efeito. Existe uma acentuada falta de proporção entre a pressão exercida sobre uma alavanca e a explosão de uma mina produzida pelo curto circúito de uma corrente elétrica. Neste caso estamos habituados à conexão dos acontecimentos e nos recusamos a classificar a explosão como um acontecimento casual.

4) **Coincidencias temporais e espaciais.** — A classe de acontecimentos nos quais o acaso consiste na coincidencia temporal ou espacial de acontecimentos diferentes é muito grande. É essencial para este tipo de acaso que não exista conexão causal entre os acontecimentos, ou que esta seja tão frouxa que a coincidencia não possa ser prevista. Todos os objetos ou acontecimentos podem entrar em alguma especie de relação entre si e quando esta relação é suficientemente frouxa ou suficientemente complicada, é chamada acaso. Aqui estão dois exemplos típicos dessa espécie de acaso.

Os dois generais franceses Kleber e Dexaix morreram no mesmo dia e na mesma hora: o primeiro foi assassinado no Cairo e o segundo morto no campo de batalha de Marengo. As funções de ambos no exército de Napoleão expunham-nos a grandes perigos, mas este conhecimento geral não é suficiente para determinar o momento da catástrofe.

Uma coincidencia da mesma espécie é o fato de que John Adams e Thomas Jefferson morreram quasi que no mesmo momento. Ambos pertenciam ao grupo de homens que redigiu a constituição dos Estados Unidos; ambos haviam sido presidentes e tinham tido inúmeros contactos durante a sua vida pública. Não existe, entretanto, nenhum grupo de condições das quais se possa tirar uma conclusão ou suposição relativa ao fim das suas vidas.

Tais observações são estimulantes, mas não dão um conhecimento real e não gozam da preferencia de todas as pessoas. De fato, muitas vezes são triviais. Tácito cita, entre as trivialidades que formavam a bisbilhotice dos romanos após a morte de Augusto, o fato de que este morrera no aniversário da data em que tomara o poder. A vida de um homem ativo como Augusto é tão movimentada que praticamente cada incidente se dá no aniversário de um outro.

O aspecto característico dos acontecimentos casuais deste tipo é a ausencia de uma relação conhecida entre os fatos. Se existe tal conexão, por mais fraca que seja, hesitamos em fazer referencia ao acaso. Suponhamos que dois irmãos estejam servindo no mesmo regimento e que este, em um recontro, sofre perdas consideraveis. A morte destes irmãos no mesmo dia e talvez na mesma hora não nos impressiona como um acaso. Ambos viviam na parte do país onde foi recrutado o regimento e a afeição mútua que os unia poderia te-los levado a servir na mesma companhia. A cadeia de circunstancias que os expôs a grandes perigos na mesmo ocasião é perfeitamente clara e a sua morte na mesma hora não dá impressão de acaso.

Da mesma fórma não consideramos acaso o fato de que tres pares de gêmeos — os irmãos Baddeley, Renshaw e Allen — jogassem tenis juntos e obtivessem grandes sucessos nas duplas. A similaridade na constituição física e mental de gêmeos torna provavel que um esporte para o qual um irmão é bem dotado, convenha também ao outro. Na sua qualidade de gêmeos, os irmãos vivem no mesmo ambiente, recebem a mesma educação e praticam os diferentes esportes em condições similares. É fácil compreender que dois gêmeos formem um ótimo par no tenis e não nos surpreendemos com o seu sucesso. A conexão dos acontecimentos é evidente e não causa impressão de acaso.

A falta de uma conexão causal entre os fatos é característica deste tipo de acaso: quando não temos conhecimento de uma conexão dessa espécie, falamos de acaso; do contrário, não o fazemos. O encontro inesperado de dois amigos é considerado acaso, e este parece ser maior quanto mais longe das respectivas residencias se dér o encontro. Não fazemos referencia ao acaso, entretanto, quando o encontro é combinado. Da mesma fórma, não falamos em acaso quando se encontram duas pessoas cujo trabalho as leva ao mesmo lugar aproximadamente à mesma hora.

Consideramos acaso o fato de se encontrarem no ar duas balas disparadas por duas carabinas. Não importa, neste caso, a circunstancia de que acontecimentos desta natureza se dão com grande frequencia e não são absolutamente raros. Falamos em acaso sempre que a informação de que dispomos não nos capacita a entender a necessidade do encontro. Segundo a teoria cinética, um gás consiste em um grande número de corpos extremamente pequenos, as moléculas, que giram com alta velocidade em todas as direções. Um número inconcebivel de colisões se verifica a cada segundo em um volume relativamente pequeno de gás sob pressão normal, mas consideramos cada colisão como um acontecimento casual porque o nosso conhecimento não nos capacita a entender por que exatamente aquelas duas moléculas determinadas se encontram no mesmo lugar ao mesmo tempo. Não é a raridade dos acontecimentos mas a ausencia de informações que é posta em evidencia na proposição de que a colisão das moléculas é um acontecimento fortúito.

Não devemos atribuir excessiva importancia às coincidencias, pois isso levaria a crer na existencia de uma conexão entre acontecimentos que, na realidade, não teem relação alguma. Um acontecimento que, por uma ou outra razão atrai a atenção pública, é frequentemente considerado como indicando qualquer coisa completamente diferente, por exemplo, que um certo número deverá ser premiado na loteria. Após a morte do Imperador Francisco, os jogadores da loteria da Austria jogaram na data do aniversário do imperador, no numero de anos que governou e na sua idade. Esse terno realmente saiu premiado e a loteria sofreu um prejuizo consideravel. Predições acertadas desta especie atraem poderosamente a atenção do público em geral e fazem-no esquecer o fracasso de outras previsões igualmente plausiveis.

5) **Influencia de acontecimentos incontrolaveis sobre ações planejadas.** — Um outro grupo de acontecimentos casuais se refere a ações que pretendem alcançar uma certa finalidade mas que, devido à interferencia de acontecimentos que lhes são estranhos, tomam um curso diferente do planejado. A experiencia mostra que em certas circunstancias podemos obter determinados resultados por meio de ações adequadas e nós iniciamos, por meio das nossas ações, uma série de acontecimentos que resultam no objetivo desejado. O acaso consiste em

favorecer ou atrapalhar os nossos planos. Se o nosso objetivo é frustrado por influencias estranhas, ou se o resultado obtido supera de muito toda espectativa razoavel, admitimos a interferencia do acaso.

Como ilustração poderemos usar o seguinte exemplo, veneravel pela sua antiguidade. Devemo-lo a Aristóteles. Um homem vai ao mercado afim de fazer umas compras, mas no caminho encontra um amigo que lhe paga uma velha dívida. Ora, sair a compras resultava, na antiga Grecia — tal como acontece ainda hoje conosco — em voltar para casa com menos dinheiro no bolso do que ao sair. O encontro inesperado com um amigo teve, neste caso, a agradavel consequencia de que o homem voltou do mercado com mais dinheiro do que tinha antes.

Atirar-se uma pessoa em um precipicio ou do alto de uma torre, geralmente resulta em ferimentos graves, muitas vezes mortais. Consideramos como um acaso extraordinário o caso de um homem, chamado Gautier, que sofria de uma molestia mental e que se atirou tres vezes da torre da igreja de St. Michel, escapando quasi ileso das duas primeiras tentativas e morrendo somente na terceira.

O acaso frustra as intenções humanas e muitas vezes transforma o resultado dessas ações exatamente no oposto das intenções originais. Casos dessa espécie constituem um tópico favorito de discussão para os filósofos moralistas que pretendem mostrar que nem a ação em si mesma nem a intenção por si só é suficiente como base para julgar uma ação e estabelecer a responsabilidade que lhe corresponde. Consideremos o seguinte exemplo. Um homem sofre de uma úlcera que virá a mata-lo, pois falta-lhe coragem para submeter-se à operação necessária. Um inimigo, entretanto, ataca-o com uma faca e fere-o de tal fórma que a úlcera é aberta, tal como na operação e em resultado a sua vida é salva. Neste caso, uma intenção criminosa atúa em beneficio da pretentida vítima. É igualmente facil elaborar exemplos nos quais a intenção louvavel resulta em detrimento da pessoa que deveria beneficiar.

A influencia do acaso é particularmente perceptivel nos casos em que empreendimentos bem planejados fracassam pela ação de acontecimentos imprevistos ou imprevisiveis, como por exemplo quando o mau tempo torna inutil todo o esforço empregado. Esta influencia é chamada acaso. Falamos tambem em acaso quando as condições não são exatamente o que se supunha, mas a diferença é tão pequena que passou despercebida, ou quando a influencia de alguma condição não foi compreendida.

O papel do anófeles na transmissão da febre amarela não era conhecido no fim do século passado. Considerava-se então uma medida de bom senso colocar dentro de pequenas vasilhas cheias de agua os pés das camas dos doentes de febre amarela, afim de impedir que os insetos subissem nas camas. Mas quando se sabe que qualquer depósito de agua constitue um foco de reprodução das larvas do anófeles, seria uma negligencia criminosa deixar vasilhas com agua nos lugares em que os insetos entram em contacto direto com o virus da febre.

Raramente possuimos conhecimento das condições realmente existentes no inicio de um empreendimento e nunca conseguimos dominar completamente os acontecimentos. O fracasso de planos cuidadosamente delineados e o inesperado êxito de ações defeituosamente planejadas mostram o poder do acaso. Experiencias deste tipo produzem no homem um incrivel número de ideias supersticiosas a respeito da boa ou má sorte e originam tentativas no sentido de influenciar o curso dos acontecimentos por meio de ações que nada teem que ver com eles. Neste sentido podemos definir a superstição como a crença na eficacia do irrelevante. Com um pouco de atenção, podemos encontrar inúmeros exemplos na nossa época, que se gaba orgulhosamente de estar libertada da superstição e o observador consciencioso deve estar preparado para a desagradavel surpreza de encontrar exemplos desse tipo no seu proprio pensamento.

A vida humana raramente é uniforme no sentido de que o seu trabalho possa ser considerado como realização de um objetivo ou de uma ideia. Circunstancias que lhe são estranhas e independem do indivíduo e das suas intenções, exercem sua influencia e frequentemente imprimem-lhe ao trabalho uma direção completamente diferente. Tais influencias, que algumas vezes favorecem, outras retardam o desenvolvimento do indivíduo, são consideradas acidentais. Referimo-nos a acaso mesmo nos casos em que o retrospecto parece mostrar que dificilmente se poderia esperar outro resultado. Gauss conta-nos que, enquanto se ocupava de uma outra pesquisa, encontrou "por acaso" uma proposição na teoria dos números que o tentou a iniciar um trabalho nesse campo: "Enquanto me ocupava em um outro trabalho, encontrei, por acaso, uma proposição aritmética notavel. ...A atração que sobre mim exerceram essas questões foi tão grande que não pude abandona-las." Se considerarmos a estrutura mental e moral de Gauss, bem como as condições da sua vida nesse momento, condições que lhe concediam tempo de sobra para seguir o rumo das suas ideias, temos a impressão de que era quasi inevitavel que ele se dedicasse ao estudo da teoria dos números. É fato, por outro lado, que há qualquer coisa de misterioso inexplicavel nas nossas decisões quanto ao ramo de trabalho que adotamos, como percebe a maioria das pessoas que já se encontra suficientemente longe do inicio.

Ao estabelecer nossos planos para o futuro próximo ou remoto, podemos tomar em consideração somente uma parte infinitesimal da totalidade das condições que podem influenciá-los. Assim somos forçados a lançar mão da suposição extremamente primitiva de que as condições gerais não mudarão de maneira apreciavel durante o período coberto pelos nossos planos. Não possuimos dados suficientes para estabelecer um plano que esteja à prova de qualquer emergencia, e se os possuissemos, o seu estudo tomaria tanto tempo que a execução dos planos teria que ser adiada indefinidamente. Somos instrumentos inermes do acaso e devemos essa situação ao nosso defeituoso conhecimento do mundo e à nossa incapacidade de influenciar-lhe o curso.

6) **Acontecimentos sem causa e imprevisiveis.** — Os acontecimentos físicos habitualmente se iniciam de certa fórma, seguem um curso definido e levam a um determinado estado definitivo. Acontece algumas vezes que um acontecimento segue um curso inteiramente diferente do que se espera. Tal interferencia no curso habitual dos acontecimentos é chamada acaso. Este uso da palavra acaso permanece correto quando nós compreendemos perfeitamente a necessidade dos acontecimentos que produziram o resultado inesperado. O acaso existe somente em relação às normas que formulam o curso habitual dos acontecimentos.

A maior parte do conhecimento que possuimos a respeito do mundo que nos circunda consiste em normas dessa natureza, e é interessante considerar quais as exceções que abalam a nossa confiança em uma norma, e quais as que não o fazem. Casos nos quais compreendemos a razão por que o resultado não está de acôrdo com a norma, não diminuem a nossa confiança nesta. A nossa convicção de que um ferimento profundo põe em perigo a vida não se deixa abalar pelo fato de que, sob determinadas condições, a perda do sangue devida a um ferimento pode salvar a vida do ferido. Um açougueiro teve um ataque de apoplexia quando trabalhava no seu açougue e enfiou a faca profundamente na coxa. Os médicos que o acudiram foram de opinião que a perda de sangue lhe salvou a vida.

Não temos confiança em uma norma quando, em condições que para a nossa percepção são idênticas, algumas vezes aparece este, outras vezes aquele resultado. Não existe norma para esses acontecimentos e consideramo-los desprovidos de leis e devidos ao acaso. A qualidade de ser imprevisivel é característica deste tipo de acaso.

Uma vez que não conhecemos as condições que produzem um resultado determinado, não podemos produzi-lo intencionalmente. Ao atirar um dado, não temos informação quanto às condições exatas que produzem um determinado resultado, e por esta razão somos incapazes de produzi-lo. Os seis resultados possiveis de um lance seguem-se irregularmente e não podemos dizer por que razão neste lance saiu o seis e naquele o quatro.

Tratando-se de coisas imprevisiveis, é impossivel a ação orientada para um objetivo. Se considerarmos o imprevisivel como objeto da ação humana, obteremos a noção de acontecimentos que não podem ser produzidos intencionalmente. Acontecimentos desta espécie são objeto dos jogos de azar, nos quais o resultado tem que depender do puro acaso e permanecer livre da influencia dos jogadores. As regras habituais para embaralhar as cartas, o ato de sacudir os dados no copo ou a maneira de atirar uma moeda, etc., teem a finalidade de impedir que o jogador influencie o resultado. Observações sobre os resultados obtidos nos jogos de azar foram, historicamente, os primeiros problemas do cálculo de probabilidade.

CAPITULO II

DOUTRINAS FILOSÓFICAS DO ACASO

1) **Impossibilidade de dar uma definição geral de acaso.** — O primeiro capítulo deste curso contem um exame geral dos atributos sobre os quais se baseia no uso comum a afirmação de que um acontecimento é devido ao acaso. Esses atributos são tão variados que é impossível encontrar uma definição geral de acaso, isto é, um atributo que seja encontrado em todos os acontecimentos que, de acôrdo com o uso comum, são considerados como devidos ao acaso. Na vida diária temos que nos contentar com essas noções nebulosas que teem origem na experiencia, embora esta não seja a experiencia cuidadosamente "peneirada" com que lida a ciência. A filosofia e a ciência empregam noções precisas que esperamos sejam logicamente coerentes.

Uma definição de "raridade" não pode ser dada a menos que seja arbitrariamente fixada a frequencia com que o acontecimento deixa de ser raro. Da mesma fórma, é impossível definir exatamente o que significa a exiguidade da causa quando comparada com o resultado obtido. O uso de outros atributos parece ser mais promissor, mas o desenvolvimento histórico desta ideia foi lento e muito tempo passou antes que se encontrasse o ponto de vista correto. Aprendemos a usar as noções de acaso e probabilidade antes que esses termos pudessem ser definidos. O espírito humano parece voltar-se instintivamente para o atributo de raridade ao procurar uma definição de acaso. Se interrogarmos pessoas de inteligencia mediana relativamente às ideias que teem sobre o acaso, frequentemente encontraremos tentativas de definir um acontecimento casual como um acontecimento que não se dá frequentemente. Algumas pessoas, ao atirar uma moeda, se recusam a considerar o resultado "cara" como devido ao acaso, porque isto acontece em 50 % das vezes, mas não teem nenhuma objeção a aludir ao acaso quando obteem o seis em um lance de dados.

Não ha razão para lamentarmos que uma definição geral dos acontecimentos que a linguagem designa como fortúitos não possa ser elaborada, seja impossivel, porque muitos dos usos desta palavra são triviais e sem consequencia alguma para a ciência. As noções populares relativas à boa e a má sorte, à providencia, às doutrinas sobre a fatalidade, o destino e o "karma", conteem pontos de vista bem claros a respeito da conexão dos acontecimentos e baseiam-se nas ideias populares sobre o acaso. Estas ideias são importantes em razão do grande poder que exercem sobre o espírito e as ações dos homens, mas não são accessiveis a considerações estritamente lógicas. O seu estudo é objeto da psicologia social e não da lógica e não as discutiremos aqui.

O que nos interessa é a definição precisa e coerente da noção de acaso tal como é usada na ciência. O cálculo de probabilidade e a doutrina jurídica aplicam extensiva e sistematicamente estas noções. Aprendemos a usar a noção de acaso com confiança nesses dois setores e tal êxito prático nos faz crer ou ter a esperança de que esta noção não contenha uma contradição.

O valor prático do cálculo de probabilidade está provado pelo seu êxito na física e nos seguros. O homem da rua — esse famoso representante do bom senso, de cuja boca alguns filósofos esperam ouvir a solução dos mais abstrusos problemas — pode pôr de lado as teorias da física como "snobismo" intelectual, mas não poderá deixar de sentir-se impressionado pelos bilhões empregados no negocio de seguros e nas pesquisas estatísticas. Este êxito nos poderia facilmente tentar a negligenciar o fato de que a noção do acaso contradiz redondamente os principios gerais da ciência. Compreendemos um fenômeno físico quando vemos a sua conexão necessária com as condições que o produzem, e o desenvolvimento histórico do pensamento científico concedeu à idéia de uma conexão geral e necessária entre o acontecimento e suas causas uma supremacia mais ou menos indiscutivel. Os acontecimentos casuais, aparentemente, não são determinados unicamente pelas suas causas, pois condições que, à nossa percepção, parecem idênticas, podem produzir resultados diferentes em ocasiões diversas. Parece que os acontecimentos casuais não são devidos a causas definidas e não pertencem à mesma categoria dos fenômenos de que se ocupa a ciência.

Como é possivel usar a noção de acaso na física e, mais ainda, na geometria e na teoria dos números, sem entrar em contradição com os princípics dessas ciências? A noção de acaso parece implicar em uma negação da conexão causal universal entre os acontecimentos e as respectivas condições e isto contradiz os nossos pontos de vista relativos às leis naturais investigadas pelas ciências físicas.

Mal se pode conceber que duas ideias contraditorias — a noção de uma conexão causal universal dos acontecimentos e a sua negação — possam ser igualmente bem sucedidas. Se tal contradição não existe, defrontamo-nos com a questão de saber como estas duas ideias — das quais uma parece ser a negação da outra — se relacionam entre si. Se considerarmos a magnitude desta questão, que é de importância básica para a nossa concepção geral do mundo, poderemos facilmente compreender que o interesse por uma definição de acaso, clara e isenta de contradições, não pode diminuir. Raramente se passa um ano sem trazer à luz um ou mais tratados sobre esse asunto. De fato, considerando a importancia do problema, é de admirar que as publicações desse gênero não sejam mais numerosas.

2) **Definições de acaso.** — O número de definições de acaso que teem sido oferecidas à ciência e à filosofia é grande, e é possível classifica-las em grupos cujos membros teem certas características comuns. Com o correr do tempo, elaborou-se uma terminologia que se presta perfeitamente para uma rápida caracterização destas definições. Explicaremos aqui os termos mais importantes.

a) A suposição de que existem acontecimentos que não são determinados unicamente pelas condições existentes e que, portanto, não teem causa, é chamada: "doutrina do acaso absoluto ou objetivo". Alguns autores dizem que os acontecimentos casuais são indeterminados unicamente em relação a certos atributos, tais como determinações espaciais e temporais. Como temos a liberdade de considerar estes atributos como formando uma classe independente, este ponto de vista implica na suposição de que existam acontecimentcs sem causa.

b) A impossibilidade de prever o curso de certos acontecimentos é chamada: acaso subjetivo. O ponto de vista de que o acaso é devido à nossa falta de conhecimento chama-se: "doutrina do acaso subjetivo".

c) O ponto de vista de que o acaso consiste na coincidencia de acontecimentos independentes chama-se: "doutrina do acaso relativo".

d) O ponto de vista de que o acaso consiste na interferencia de acontecimentos estranhos no curso das ações planejadas chama-se: "doutrina do acaso teleológico". Se virmos nos fenômenos da natureza a realização de um objetivo, a noção do acaso teleológico pode ser aplicada aos fenômenos naturais.

e) Os acontecimentos representativos de uma noção determinada necessariamente possuem todos os atributos implicados na definição dessa noção. A presença de um atributo não contido na definição chama-se: "acaso lógico". Mostraremos que esta é a unica noção que pode ser usada no cálculo de probabilidades sem conduzir a contradições.

Estes pontos de vista podem variar consideravelmente se se acentuarem diferentes aspectos e os quatro primeiros pontos de vista citados podem ser combinados entre si. A noção de acaso teleológico desempenha importante papel na teoria e prática jurídicas, mas não tem importancia imediata para o cálculo da probabilidade, que considera acontecimentos de todas as especies, quer sejam devidos às ações humanas voluntárias, quer não. O jurista, no seu trabalho, não precisa preocupar-se com as outras definições de acaso, pois está simplesmente interessado nas ações humanas voluntárias e nas suas consequencias. Não se pode negar, entretanto, que os pontos de vista gerais que o jurista tenha adotado relativamente ao acaso devem influenciar as suas opiniões a respeito do acaso teleológico.

3) **Acaso objetivo.** — A impossibilidade de prever o curso dos acontecimentos é um característico proeminente do acaso e parece obvio fazer uso desse característico para definir o acaso. Tal definição, para ser satisfatória, tem que vencer a seguinte dificuldade. A nossa ignorancia quanto à conexão entre os acontecimentos e suas causas existe em muitos campos, mas o progresso da ciência a vem reduzindo cada vez mais. Esta ignorancia só pode ter significação objetiva quando se trata de acontecimentos para os quais a conexão entre causa e efeito não existe ou, por esta ou aquela ra-

zão, não pode ser encontrada por nós. A noção de acaso exige que existam acontecimentos cujo curso permanecerá imprevisivel mesmo quando o nosso conhecimento das leis naturais alcançar a mais alta perfeição possivel.

Enquanto esse estado ideal não fôr atingido, os limites do acaso subjetivo vão sendo constantemente reduzidos e precisamos distinguir entre fenômenos que são imprevisiveis num dado momento e fenômenos cujo curso é absolutamente impossivel vir a conhecer. A nossa compreensão do curso dos acontecimentos baseia-se no conhecimento que possuimos das leis da natureza e a doutrina do acaso objetivo afirma existirem fenômenos que não seguem lei alguma. O número de pensadores que defende este ponto de vista é consideravel e podemos citar L. Nelson como um dos seus modernos representantes.

O ponto de vista comum da lei de causalidade exige que todos os atributos de um acontecimento ou objeto sejam estritamente necessários. A universalidade do princípio de causalidade é negada quando se tenta excluir dos acontecimentos casuais qualquer traço particular, característico das conexões causais. Assim podemos tentar negar a necessidade pela qual o efeito segue a causa. Um acontecimento casual se verifica sem que exista a necessidade de que o seu oposto não se dê. Foi dessa maneira que Spinoza e J. Ch. Wolff definiram o acaso, dizendo que o acaso é um acontecimento que não é necessário. Ha um número ilimitado de possibilidades de variar este ponto de vista. Assim, Rosenkranz define o acaso como uma realidade que tem apenas o valor de uma possibilidade e F. A. Trendelenburg diz que um acontecimento é devido ao acaso quando tem a mesma possibilidade de ser diferente ou de não acontecer absolutamente.

A questão de saber se devemos postular a universalidade da lei causal ou considerar os acontecimentos casuais como isentos deste princípio, não pode ser respondida quer por considerações gerais, quer pela experiencia. Não existem proposições gerais pelas quais acontecimentos sem causa sejam excluidos, de maneira que a universalidade da causalidade não pode ser logicamente demonstrada. O grande número de fenômenos cuja causa é desconhecida torna muito pouco provavel que a ciência jamais venha a alcançar o ideal de compreender a necessidade da conexão de todos os fenômenos. Por outro lado, não é seguro afirmar a ausencia dessas conexões relativamente a um acontecimento particular, pois a sua explicação pode ser impossivel hoje mas tornar-se uma brincadeira amanhã. Os pontos de vista relativos ao acaso objetivo estão tão intimamente entrelaçados à questão da causalidade universal, que é quasi impossivel discutir uma dessas questões sem discutir tambem a outra.

O problema do acaso objetivo ou absoluto é importante somente para o pensamento abstrato. Os espíritos alheios aos problemas científicos não encontram dificuldade em aceitar como um fato a existencia de acontecimentos sem causa. O número de fenômenos cuja causa é desconhecida é imenso e parece uma arbitrariedade postular para eles uma conexão causal, simplesmente porque obtivemos êxito em um número de casos relativamente pequeno. A ciência já privou muitos fenômenos do seu característico de acontecimentos causais e sem dúvida ainda fará o mesmo com muitos outros, mas é necessário possuir uma fé verdadeiramente forte e robusta para crer que todo o curso da natureza seja acessivel aos métodos científicos. O fato é que a ciência não sabe lidar com acontecimentos considerados como isentos de causa.

As discussões sobre a causalidade universal frequentemente assumem o carater de profissões de fé e não de raciocinios lógicos. Argumento algum consegue abalar a convicção de um homem que acredita na existencia de acontecimentos sem causa. É muito facil apontar acontecimentos cuja causa é desconhecida e considera-los sem causa. Se, ao contrário, a pessoa crê na universalidade da causalidade, facilmente refuta tais argumentos com a afirmação otimista de que algum futuro progresso da ciência fornecerá a necessária explicação. A falta de argumentos de ambos os lados da questão leva pensadores, dos quais se tinha o direito de esperar coisa melhor, a se entregarem a declamações ou a explosões de cólera.

O seguinte exemplo mostra o vigor com que a afirmação e a negação se opõem nesta questão. J. Venn diz que nenhum homem sensato nem de leve suspeita que o princípio da causalidade não se aplique ao lance dos dados. H. Gomperz, por outro lado, afirma que se alguem atirar um dado 60.000 vezes por ano e obtiver aproximadamente 10.000 vezes o seis, não será por isso obrigado a concluir que o resultado de cada lance seja necessário. A isto podemos responder que um homem que não esteja convicto de que os movimentos do dado obedecem a estritas leis mecânicas, não será jamais convertido por essa experiencia a um ponto de vista melhor.

Para a maioria das pessoas, uma experiencia desse tipo é mais ou menos irrelevante, pois não duvida da existencia de uma conexão necessária entre o aparecimento de um certo número e as condições mecânicas existentes.

Um individuo que se formou sob a influencia da maneira de pensar empregada nas ciências naturais, adquire hábitos de pensamento que são facilmente tomados como necessidades do raciocinio. Em parte alguma é esta influencia tão claramente visivel como na questão da causalidade universal. Consideremos um dos mais antigos exemplos de acontecimento sem causa. Demócrito imaginou que os seus átomos se moviam ao longo de linhas retas mas, em dado momento, sem causa alguma, desviavam-se da sua rota. Quero que os srs. façam em casa um pequeno experimento psicológico. Procurem representar esses atomos como pequenas bolas que se movem livremente no espaço. Fechando os olhos, verão um fundo cinza não muito claro, sobre o qual se movem as esferas. Estas bolas não são muito pequenas, como ervilhas, por exemplo, mas antes do tamanho de bolas de bilhar. É muito dificil prestar atenção a mais de três bolas ao mesmo tempo e o experimento terá êxito se os srs. se concentrarem em uma só esfera. Não encontrarão dificuldades enquanto esta se mover em linha reta, mas no momento em que a bola mudar de direção espontaneamente e sem nenhuma influencia externa, terão a desagradavel sensação de estar observando um truque de prestidigitação.

O seguinte fato é interessante para os nossos pontos de vista sobre a causalidade. A moderna teoria da irradiação admite que a divisão do átomo se dá espontaneamente, como consequencia de uma disposição interna e sem interferencia de qualquer influencia exterior. Este ponto de vista não difere daquele dos antigos materialistas, isto é, de que os átomos se desviam das suas rótas espontaneamente, mas é amplamente aceito, sem discussão. O fato de que os fenômenos que se dão no interior do átomo não nos são familiares e de que não podemos representá-los mentalmente com facilidade, parece ser responsavel por esta atitude. Se eu tentar representar mentalmente a divisão espontânea de um átomo, sentirei grande dificuldade, mas não terei a sensação de estar lidando com uma especie de truque. Creio que os srs. sentirão a mesma coisa.

A convicção de que não existem truques na natureza e de que tudo se processa de acôrdo com normas definidas, levou Kant a uma das suas raras explosões de cólera. No prefacio do "Algemeine Naturgeschichte und Theorie des Himmels" chama Epicuro de "impudente" porque este achava que os átomos se desviavam sem causa da sua róta. Não é de admirar que as ideias dos antigos materialistas nos pareçam absurdas. Aprendemos desde a escola primária que um corpo físico não altera o seu movimento sem uma causa e vivemos sempre na atmosfera da mecânica newtoniana. Mas houve uma época em que a moderna mecânica não existia e os homens cresciam sob a influencia de outros processos de pensamento. Aristóteles, por exemplo, não acreditava na causalidade universal e para uma pessoa educada dentro dos princípios da sua física, o nosos pequeno experimento de procurar uma imagem mental do desvio espontâneo de um átomo não resultaria na sensação de mal estar que sentimos. Mesmo em nossos dias existem, na classe instruida, muitas pessoas que não encontram dificuldade em visualizar a mudança sem causa do movimento de um corpo. Em todos os tempos se encontram pensadores sérios que não se opõem à ideia de acontecimentos sem causa, e não se pode negar que a causalidade de um imenso número de acontecimentos é desconhecida.

O princípio da causalidade é uma proposição da mais alta universalidade e, como tal, é inaccessivel a uma prova por meio da experiencia. A negação da sua universalidade não é uma falta de carater, como Kant parece sugerir, nem é a crença na conexão necessária de todos os acontecimentos um indício de espírito particularmente forte, como afirmam frequentemente escritores populares. Quer se creia nesse princípio, quer se o negue, algumas das consequencias a que se chega são inaceitáveis. Realmente, se o aceitarmos seremos quasi inevitavelmente levados a afirmar alguma coisa relativamente à conexão entre fenômenos físicos e mentais, o que nunca deu resultado satisfatório. Isto é verdadeiro mesmo a respeito do famoso "Essai philosophique sur les probabilités", de Laplace. Esse livro foi escrito por um dos grandes mestres da ciência física, mas é dificil reprimir uma sensação de irritada impaciencia quando se leem as passagens referentes a assuntos de Psicologia.

A ciência não se ocupa com os acontecimentos que não estão única e necessariamente ligados às condições respectivas. Na ciência a ideia de acontecimentos sem causa é intoleravel. Se se quizer que a doutrina do acaso e o cálculo de probabilidade tenham um lugar no sistema das ciências, não se deve usar a noção de acaso absoluto.

Este argumento é decisivo contra o emprego da noção de acaso absoluto no cálculo de probabilidade e na estatística. Ha ainda argumentos de natureza mais sutíl. Como poderemos explicar o fato de que acontecimentos casuais, em condições constantes, ocorrem com frequencias constantes? É difícil imaginar que acontecimentos que individualmente não possuem causa, apresentem regularidades quando tomados em grande número.

4) **Acontecimentos independentes** — A doutrina do acaso absoluto foi formulada de maneira interessante por H. Bruns e E. Czuber. Segundo a opinião destes dois eminentes matemáticos, chegamos à noção de acaso absoluto fazendo abstração das relações causais que estão presentes nos acontecimentos fortúitos, embora sejam imperceptiveis para nós. O cálculo de probabilidade introduz à hipótese do acaso absoluto, o qual garante que os acontecimentos casuais são independentes entre si. A noção de acaso absoluto é uma abstração, isto é, uma ideia que, como tal, nunca se verifica na experiencia real. Esses acontecimentos abstratos são o objeto do cálculo de probabilidade, que constitúe um capítulo independente da matemática abstrata. A noção de acaso absoluto se obtem por um processo de idealização da experiencia, da mesma fórma que chegamos à noção de um ponto ou linha geométricos tomando em consideração os representantes empíricos desses elementos.

A. A. Cournot foi o primeiro a insistir sobre a natureza inteiramente abstrata do cálculo de probabilidade. A correção deste ponto de vista é patenteada pelo fato de que o cálculo de probabilidade, após formular os seus princípios, usa processos exclusivamente lógicos afim de deduzir as suas proposições. Nas demonstrações não recorre absolutamente à experiencia. A verdade lógica das proposições consiste na sua concordancia com os axiomas dos quais são derivadas.

A noção de acaso absoluto surge, segundo a opinião de Bruns e Czuber, por um processo de idealização semelhante àquele pelo qual são obtidos os objetos da geometria abstrata. Os representantes empíricos de uma linha reta são cilindros nos quais uma dimensão ultrapassa consideravelmente a outra. Imaginamos que a proporção cresce continuamente — o comprimento do cilindro aumenta e o calibre diminue — e obtemos como limite a linha reta ideal, de uma só dimensão. Esta linha ideal existe somente no nosso pensamento e jamais é encontrada na experiencia. A geometria abstrata lida com esses objetos ideais, e o cálculo de probabilidade se refere nos seus teoremas a objetos do mesmo tipo, que são obtidos como noções que limitam acontecimentos empíricos e contrados na experiencia. A ideia de acontecimento sem causa é uma noção auxiliar — uma ficção, na terminologia de H. Vaihingerer, uma noção limitativa para usar uma expressão de F. A. Lange, o famoso autor da história do materialismo.

O valor dessas noções deve ser provado demonstrando que se encaixam no nosso sistema de pensamento. A afirmação de que o cálculo de probabilidade está no mesmo nivel que a geometria é correta. Em ambas as ciências lidamos com grupos de axiomas dos quais são deduzidas proposições abstratas. Acontece que essas proposições se aplicam à experiência, mas a sua verdade lógica independe desse fato. O ponto fraco dessa teoria consiste no fato de que a noção de acontecimento sem causa não nos oferece uma base para o cálculo de probabilidade, que é coerente com as nossas opiniões a respeito da natureza. Trata-se aqui de uma elaboração lógica em que uma contradição não pode ser tolerada. O acaso absoluto está em contradição com os princípios da física, mesmo que seja apenas introduzido como uma noção limitativa.

A definição de Bruns e de Czuber disfarça a dificuldade, mas não a remove. Somos obrigados a reconhecer que mesmo esta última tentativa de reconciliar a noção de acaso absoluto com os princípios da ciência, fracassou.

5) **Acaso subjetivo** — Se o acaso não é um atributo dos acontecimentos objetivos, deve ser um fenômeno inteiramente subjetivo e devido a algum defeito do nosso conhecimento. É hábito mencionar Laplace como o criador deste ponto de vista, porque ele diz que o acaso é um "som vazio, **flatus vocis**, que nos serviria para disfarçar a ignorancia, onde nós seriamos as verdadeiras causas". Alguns autores citam Hume, que nega a existencia do acaso objetivo e admite somente o seu equivalente, ou seja, a nossa ignorancia das causas de um acontecimento. A grande maioria dos escritores mais modernos aceita esta maneira de ver e cita Laplace como seu autor. A doutrina do acaso subjetivo, entretanto, foi muitas vezes formulada antes de Laplace e pode ser facilmente seguida até a filosofia grega.

Ninguem suspeitará Laplace de ter sido indevidamente influenciado por especulações filosóficas, mas essa frase mostra claramente a influencia da filosofia escolástica. Os realistas acreditavam na existencia de universais, que era negada pelos nominalistas. Para estes, os universais não passavam de palavras, ou "flatus vocis", como, segundo a tradição, disse Roscelin no fim do século onze. Estas duas palavras latinas sem dúvida exprimem muito bem a ideia de Laplace, mas o fato de as haver ele usado nesse contexto constitue uma curiosa charadazinha de psicologia pessoal.

Consideremos o problema que resulta do fato de que os acontecimentos devidos ao acaso resistem às nossas tentativas no sentido de alargar o campo do conhecimento. Dificilmente se concebe que pensadores que acreditam na causalidade universal não tivessem tido a ideia de que o acaso é um fenômeno inteiramente subjetivo, devido às deficiencias dos nossos conhecimentos. Aristóteles não crê na causalidade universal e defende na física o seu proprio ponto de vista contra o de alguns outros filósofos cujos nomes não menciona, os quais afirmam que os acontecimentos casuais teem suas causas que, todavia, são inaccesiveis ao conhecimento humano. Diz ele: "Ha alguns filósofos que afirmam que todo acaso tem uma causa, mas que esta é inaccessivel à inteligencia humana". A última parte desta frase exprime claramente a doutrina do acaso subjetivo. Aristóteles argumenta contra uma doutrina que no seu tempo evidentemente era corrente, e, talvez, popular. Que o acaso é um fenômeno inteiramente subjetivo é claramnte indicado por Hipócrates, que diz: "Para nós, parece acaso, mas em relação à sua causa não é acaso".

Na época moderna, Spinoza aceita inteiramente o ponto de vista esposado pelos adversários desconhecidos de Aristóteles, quando diz na sua Ética, I, Prop. 33, Schol. 1: "Res aliqua mulla alia de causa contingens dicitur, nisi respectu defectus nostrae cognitionis". Pouca probabilidade teremos de errar se acreditarmos que os elementos representativos da filosofia do iluminismo foram largamente influenciados por Spinoza. Os pontos de vista relativos ao acaso apresentados por esta escola de pensamento encontra a sua mais significativa expressão na definição acima citada.

Já para J. B. Bossuet, o acaso nada mais é que uma palavra destinada a encobrir a nossa ignorancia. Diz ele no seu "Discours sur l'Histoire Universelle": Ne parlons donc plus de hasard ni de Fortune, ou parlons-en seulemente comme d'un nom, dont nous couvrons notre ignorance. Ce qui est hasard à l'égard de nos conseils incertains est un dessein concerté dans un conseil plus haut, c'est à dire à ce conseil éternel qui renferme toutes les causes et tous les effets dans un même ordre". É curioso observar a nota teológica que revela, no fim, o pensamento de Bossuet.

O ponto de vista de Spinoza aparentemente não exerceu grande influencia durante a primeira parte do século 18. Citaremos apenas dois representantes da doutrina do acaso subjetivo. O primeiro é W. Wollaston, que, no seu livro "Religion of Nature Delineated" (1722), diz: "O acaso parece ser apenas um termo por meio do qual exprimimos a nossa ignorancia da causa de qualquer coisa", e Kahle, um professor alemão, que publicou em Halle (1725) um trabalho intitulado "Elementa Logicae Probabilium", onde diz: "Incerta nobis dependent a defectu cognitionis". Nota-se que, nesta frase, a nota teológica com que Bossuet termina desapareceu e a definição subjetiva de acaso é dada sem mais explicações.

A definição de acaso de Voltaire figura, caracteristicamente, no artigo "Athéisme" do Dictionnaire Philosophique, e diz: "Ce que nous appellons hasard n'est et ne peut être que la cause ignorée d'un effet connu". Podemos supor que Laplace conhecesse essa definição e tivesse sido influenciado por ela.

Talvez nem valha a pena citar os autores que seguiram Laplace, pois limitam-se a repetir esse ponto de vista, sem aduzir nada de novo. A doutrina do acaso subjetivo é encontrada na maioria dos compendios sobre o cálculo de probabilidade e parece ser aprovada pela maior parte dos matemáticos. Entre os partidários de Laplace, o nome de L. A. Quételet merece menção especial, pois no seu livro "Sur la Théorie des Probabilités", diz ele: "A palavra acaso serve oficiosamente para disfarçar a nossa ignorancia". Quételet fez mais que todos os outros no sentido de popularizar a teoria da probabilidade e a estatística. É uma tarefa dificil, mas valiosa, fazer com que um grande número de pessoas entendesse esses problemas mais ou menos abstrusos, e não resta dúvida de que a estatística e os métodos estatísticos não teriam tido a aceitação geral de que gozam atualmente se Quételet, com seu estilo tão atraente, não os tivesse tornado compreensiveis para o leigo.

A doutrina do acaso subjetivo não só aceita a causalidade universal, mas faz dela um dos seus dogmas. Não está, portanto, em contradição com as ciências físicas. Resta ainda a questão de saber se é ou não uma base adequada para o cálculo de probabilidade. Parece curioso que a ignorancia possa servir de base para afirmações de fato que o cálculo de probabilidade e a estatística evidentemente fazem. É dificil tambem atribuir um significado definitivo às frações pelas quais as probabilidade são medidas. Serão elas, talvez, medidas da nossa ignorancia? Se forem, deverão ser medidas de estados mentais e nós nos veremos envolvidos em todas as dificuldades com que os psicólogos já estão tão familiarizados através das discussões da Lei de Weber. Trataremos destas questões nas aulas dedicadas à definição de probabilidade.

6) **A complexidade dos acontecimentos** — Não é de admirar que investigadores interessados principalmente no aspecto técnico do cálculo de probabilidade não se preocupassem muito com a questão de saber em que consiste a ignorancia a que se faz referencia na definição de acaso subjetivo, e qual é a sua causa. Daremos um exame geral dos pontos de vista expressos relativamente às condições sob as quais surge o fenômeno do acaso subjetivo. O mais importante diz respeito à excessiva complexidade das condições das quais dependem os acontecimentos fortúitos. Não resta dúvida quanto à existencia de certas leis que regem esses acontecimentos, e que, em alguns casos, são perfeitamente conhecidas. As

condições de que dependem esses acontecimentos são tão complexas que, ou escapam à nossa percepção, ou a sua determinação exata exige investigações por demais difíceis para serem realmente levadas a efeito.

O resultado do lance de um dado é inteiramente determinado pelas velocidades e rotações com referencia aos tres eixos em qualquer momento, bem como pela estrutura física do dado e da superficie sobre a qual ele cai. As leis segundo as quais essas velocidades e rotações mudam são perfeitamente conhecidas e o cálculo númérico do resultado não ofereceria dificuldade desde que se estivesse de posse das informações necessárias. A mensuração dessas quantidades, ainda nas circunstancias mais favoráveis, é trabalhosa; quando se está jogando realmente, torna-se impossivel propositalmente pelas regras do jogo. Não seria impossivel formular as condições sob as quais o lance de um dado deixa de constituir acontecimento fortúito. O dado seria atirado por um aparelho que lhe imprimiria velocidades e rotações exatamente conhecidas, e, além disso, as constantes físicas do dado seriam determinadas por meio de uma investigação especial. Para um indivíduo que conhecesse o funcionamento do instrumento, esse lance de dado não constituiria um acontecimento fortúito, mas para outro que não possuisse essa informação, permaneceria o acaso subjetivo.

A exatidão na determinação das constantes físicas do dado, bem como na construção do aparelho, tem limites, de maneira que o resultado não pode ser calculado de maneira absolutamente exata. Há certos casos nos quais o resultado calculado é absolutamente certo apesar dessas inexatidões. Em outros casos, não podemos afirmar com certeza que este ou aquele resultado será obtido. Se a exatidão na determinação das constantes e na construção do aparelho decrescer, o erro que afeta o resultado se tornará cada vez maior, de maneira que eventualmente não estaremos mais em situação de prever o resultado. Desta maneiar desceremos do ponto ideal de uma certeza quasi completa na previsão do resultado, para uma ignorancia parcial ou completa.

O ponto de vista de que o acaso subjetivo no lance de um dado é devido à nossa incapacidade de analisar as condições com exatidão suficiente, foi apresentado em primeiro lugar por J. Kepler. No ano de 1604, uma nova estrela foi observada e o seu aparecimento provocou grande variedade de explicações — como habitualmente acontece com os fatos novos. Esse fato levou Kepler a escrever um tratado intitulado: "De Stella Nova in Pede Serpentarii", que veio à luz em 1606. Argumentando contra o ponto de vista epicúreo de que a estrela era resultado de uma colisão casual de átomos, Kepler insiste em que o resultado de um lance de dado não é absolutamente um acontecimento sem causa.

Os trabalhos menos importantes de Kepler dificilmente seriam considerados como leitura adequada para o estudante comum, e esta passagem muito provavelmente teria passado despercebida se Dugald Stewart não tivesse chamado sobre ela a atenção dos estudiosos. Lendo este trecho, não nos devemos surpreender pelo fato de "impetus animi" ser mencionado entre as condições atuantes. A superstição de que a maneira pela qual se comporta o jogador, a sua expressão fisionômica e a sua confiança teem influencia sobre o resultado de um lance é muito difundida e foi apresentada por jogadores experimentados como argumento contra a concepção de probabilidade de Galileu. Esse trecho é muito curioso, como os srs. poderão verificar, tenho certeza, se tiverem oportunidade de le-lo no 2.º volume das obras completas de Kepler, editadas por Fritsch.

Bruns chamou a atenção para a excessiva complexidade das condições como causa do acaso subjetivo. H. Westergaard, o estatístico, ilustra este ponto de vista com o exemplo de tirar uma bola de uma urna e observa que o resultado depende de grande número de condições, cada uma das quais parece futil e irrelevante. Sem referir-se a nenhum predecessor, E. Borel apresenta o mesmo ponto de vista e as palavras: "...qui analysera néanmoins en détail les mouvements de la main qui jette les dès ou qui batte les cartes", soam quasi como uma reminiscencia da frase de Kepler.

O exemplo do lance do dado é instrutivo, porque as leis físicas em virtude das quais o resultado depende das condições são perfeitamente conhecidas, e podemos imaginar um expediente pelo qual esses acontecimentos fiquem privados do seu carater de acontecimentos fortúitos. Em outros casos não possuimos esse conhecimento, como por exemplo na determinação do sexo de um nascituro e não temos meios de formular as informações necessárias para fazer uma predição do resultado. A previsão de um fenômeno é imposivel quando as leis em virtude das quais ele depende das respectivas condições são desconhecidas. A mesma impossibilidade existe quando as leis são conhecidas, mas as condições iniciais não podem ser determinadas com suficente exatidão. Vejamos mais um exemplo, citado por Cournot.

Grandes perturbações meteorólogicas surgem em um ponto onde a atmosfera esteja em equilibrio instavel. Essa situação é facilmente perceptivel e sabe-se então que um ciclone se prepara, mas é imposivel predizer o lugar em que se desencadeará. Diferenças mínimas de temperatura fazem com que a tempestade se inicie neste ponto e não naquele. Ha certas limitações para a exatidão com a qual podemos observar um fenômeno físico. Somente em parte são essas limitações devidas à nossa má vontade ou relutancia em fazer despezas ilimitadas na compra dos instrumentos necessários. Mesmo que o obstáculo das despezas fosse removido, não poderiamos tornar as nossas observações absolutamente exatas.

A análise das condições sob as quais o fenômeno do acaso subjetivo pode surgir foi o ponto de partida de algumas das mais interessantes investigações. Essas investigações não são dificeis no sentido de que exijam um conhecimento particularmente profundo das proposições matemáticas empregadas, mas são extremamente complicadas e trabalhosas. Esta dificuldade pode ser melhor apreciada diante do fato de que Gauss abandonou o tratamento de um desses problemas porque as fórmulas se tornaram tão complicadas "ut nulla spes superesse videatur".

7) Acontecimentos absoluta e relativamente imprevisiveis — Se as leis que governam um fenômeno são conhecidas, a correção da nossa previsão depende da exatidão com que pudermos determinar as condições iniciais. Esta exatidão depende do estado da técnica de mensuração de que dispomos e em qualquer época existe um limite além do qual não podemos passar. Abaixo deste limite podemos conceder ou negar a esses acontecimentos o carater de acaso subjetivo. A determinação do peso de um corpo pode servir de exemplo. Se tivermos à nossa disposição uma boa balança, podemos facilmente alcançar um alto grau de precisão. Nos experimentos psicofísicos confiamos exclusivamente nas sensações de peso produzidas no sujeito e a nossa determinação é realmente muito inexata. A nossa atitude nestes dois casos é diferente. No primeiro caso estamos interessados no peso do corpo, e na psicofísica o que nos interessa é a sensibilidade do sujeito.

Desta fórma chegamos a uma modificação importante da noção de acaso subjetivo, distinguindo acontecimentos que são absolutamente imprevisiveis dos que o são apenas relativamente. Um acontecimento é relativamente imprevisivel quando o resultado não pode ser previsto em um dado estagio do conhecimento. Se tomarmos como ponto de referencia as informações disponiveis em uma dada época, teremos os acontecimentos que são devidos ao acaso para os indivíduos que vivem nessa época. As informações que um indivíduo possue em uma dada época, determinam quais os acontecimentos que, para esse indivíduo, são devidos ao acaso subjetivo. Em alguns casos é muito facil remover o acaso subjetivo. Ninguem pode dizer se o logaritmo de um determinado número tem um certo algarismo na quinta casa decimal, e neste sentido o aparecimento desse algarismo no logaritmo é um acontecimento casual, mas deixa de possuir esse característico se me derem uma taboa de logaritmos.

A responsabilidade de uma pessoa pelas consequencias das suas ações depende das informações de que dispõe e varia de indivíduo para indivíduo. O grau de presciencia que pode ou deve ser exigido de um indivíduo determina a responsabilidade legal e o jurista, na prática da lei, deve considerar, quasi que diariamente, a questão de saber se um certo acontecimento é devido ou não ao acaso. Devem-se a juristas muitas das mais importantes contribuições para o estudo deste aspecto do acaso. O julgamento depende sempre da resposta à questão: quais são os acontecimentos considerados como devidos ao acaso sob determinadas condições? O seguinte exemplo pode servir como ilustração.

Dois automoveis correm em direções opostas em uma estrada livre, com a velocidade alta, mas não proibida, de 70kms. p.h. Uma perdiz, assustada com o barulho, levanta vôo, choca-se violentamente contra o para-brisa de um dos carros e quebra-o. Os cacos de vidro projetados contra o rosto do motorista ferem-no, de maneira que ele perde o controle do carro e em consequencia produz-se uma colisão. O acidente aconteceu em França. O tribunal que julgou o caso atribuiu inteira responsabilidade ao motorista ferido, porque em um país onde a caça é abundante o motorista deve estar preparado para o perigo de ser perturbado por um pássaro que levanta vôo. Ao pronunciar o julgamento o tribunal formulou o seguinte princípio: "Perdrix dans la parbrise n'est pas coup fortuit'. É evidente que tal julgamento deve ser baseado em um profundo conhecimento das condições dominantes e que em outro país, ou talvez em outra região da França, o acidente pudesse ter sido julgado de maneira diferente.

Podemos tentar empregar a noção de acaso subjetivo como base para uma definição geral do acaso, declarando-o como absolutamente imprevisivel. Esta definição implica em que haja certas classes de acontecimentos que são imprevisiveis, mesmo que o nosso conhecimento tenha alcançado o mais alto grao de perfeição. Os acontecimentos casuais dependem de condições definidas, mas a relação entre as causas e os respectivos resultados não é passivel de ser conhecida por nós. Há algumas doutrinas filosóficas que servem perfeitamente como base para este ponto de vista relativamente ao acaso.

A. Conte afirma que a relação entre causa e efeito pode ser tão complexa que a nossa inteligencia não pode apanha-la. Na física orgânica — para usar a terminologia de Comte — bem como nos ramos mais dificeis da física inorgânica, ha fenômenos que resistem à análise matemática. Esses fenômenos seguem certas leis definidas, mas "nous sommes condemnés à les ignorer à cause de leur trop grande complication". Os limites do incognoscivel são traçados por Comte de maneira grandiosa: Quando uma lei natural, a de Mariotte, por exemplo, é estabelecida, deve permanecer para sempre imutavel, e mesmo a tentativa de observar os fatos relativos a essa lei de maneira mais rigorosa, com melhores instrumentos, é vedada. Comte voltou a este tópico inúmeras vezes e nunca se fartou de exprimir a sua desaprovação contra tais tentativas. Traçar as fronteiras do fortúito e do acidental à maneira de A. Comte, é profundamente arbitrário. Devemos declarar também que proibir investigações mais rigorosas de qualquer fenômeno cujas leis se supõe conhecer, é intoleravel em qualquer ramo da ciência.

O ponto de vista da ciência parece ser o seguinte: não ha fenômenos naturais aos quais os métodos científicos não se apliquem e em face dos quais nos devamos resignar ao fato de que os nossos esforços para alargar o campo do conhecimento serão vãos. Parece ser obvio considerar os acontecimentos mentais como os fenômenos incognosciveis e desprovidos de causa a que se refere a definição de acaso subjetivo. Ha várias razões pelas quais alguns filósofos gostam de atribuir uma posição particular aos acontecimentos mentais e repetidamente se tentou defini-los isentando-os da causalidade. Os mais conhecidos representantes de tais pontos de vista são William James e o seu colega Hugo Münsterberg. O último coloca os acontecimentos mentais fóra da cadeia das conexões causais e considera-os como objetos de uma atitude do sujeito. Desta maneira prepara o terreno para o que chama julgamentos de valor, que formam uma classe de proposições lógicas. Os estados mentais são, segundo esta definição, independentes do curso dos acontecimentos naturais, enquanto que os processos fisiológicos concomitantes são causalmente necessários.

Nenhum destes dois filósofos tirou as conclusões que resultam, para a doutrina do acaso, desta maneira de ver; Münsterberg não estava interessado nesta questão e James expôs nas suas aulas a doutrina do acaso relativo. O fato de que estes dois filósofos e os seus numerosos discípulos deixassem de perceber a repercussão desses pontos de vista sobre a doutrina do acaso constitue um curioso fragmento de psicologia individual. A opinião de que as ações voluntárias humanas são a fonte genuina do acaso é claramente expressa por J. Bertrand no seu livro: "Les lois du Hasard": "La liberté du choix produit, à parler rigoureusement, les seuls faits fortuits". Idêntica opinião é apresentada por A. Darbon que diz, ao discutir a frequencia dos algarismos 0, 1. ... 9 no número π: — "Em última análise, o único acontecimento verdadeiramente aleatório que se possa invocar na interpretação destes exemplos é a escolha de um sistema aritmético e, por conseguinte, um fato psicológico ou social, onde a vontade humana encontra talvez ocasião de se exercer". O tratado de P. Mansion: "La portée objective du calcul des probablités" deve ser citado aqui, pois também esposa o ponto de vista que as ações humanas voluntárias são fortúitas. Recentemente Lecomte de Noüys retomou esta questão no seu livro "L'Avenir de l'Esprit", mas a posição que adota não é muito clara. Diz ele: "Conservemos a noção de acaso, ou melhor, os metodos baseados sobre o cálculo de probabilidade, para todos os problemas simples nos quais a vida não intervem... Mas não tentemos aplica-los a problemas por demais misteriosos onde eles apenas se arriscam a tornar-se ridículos". Isto parece implicar que o cálculo de probabilidade deve ser usado exclusivamente no estudo dos fenômenos físicos, mas é um fato que esses métodos teem sido usados com êxito na biometria e em outras ciências que, sem dúvida alguma, estudam a vida. É um fato curioso que todos os autores citados aqui sejam franceses e alguns deles eminentes matemáticos. Não resta dúvida de que não foram influenciados por James ou Münsterberg, mas sim pelas opiniões correntes sobre o livre arbítrio. Isto se torna claro pelo fato de que se limitam às ações humanas voluntárias, do mesmo passo que negligenciam a eficaz aplicação do cálculo de probabilidade aos estados mentais de carater cognitivo. O julgamento expendido na comparação de dois estímulos, por exemplo, é um acontecimento fortúito com probabilidade constante, e os números das frequencias relativas desse julgamento são comparaveis, sob todos os aspectos, às determinações empíricas de probabilidades desconhecidas. O ponto de vista de que o julgamento dessas comparações de estímulos não seria determinado unicamente pelas condições existentes não nos causa grande impressão. A percepção correta de condições objetivas tem um valor evidente para a sobrevivencia do indivíduo na luta pela vida, e é dificil compreender que assim deva ser se não ha nenhuma conexão necessária entre uma percepção e o estímulo que a produz.

8) **As regularidades estatísticas e a escola de matemática de Moscou** — Os autores que escrevem sobre o carater fortúito das decisões humanas voluntárias ocupam-se de um problema que recebeu uma resposta extremamente interessante ha muito tempo atrás. Essas ideias não se tornaram amplamente conhecidas porque a maioria das publicações foram escritas em russo e são encontradas somente em lugares dificilmente accessiveis aos estudiosos. A tentativa de reconciliar as observações estatísticas das regularidades verificadas nas ações humanas voluntárias, com as noções correntes sobre o livre arbítrio, resultaram em uma concepção do acaso que é conhecida pelo nome de doutrina da Escola

de Matemática de Moscou. O traço característico desta doutrina consiste no fato de que aponta razões positivas pelas quais a causalidade de certos acontecimentos é inaccessivel ao nosso conhecimento. Explicaremos o desenvolvimento do problema e a sua solução, tal como foram apresentados pelos matemáticos de Moscou.

Certas ações, como por exemplo os casamentos ou os crimes verificados em um ano, mostram uma regularidade notavel quando são considerados em comunidades relativamente grandes e fechadas. Os valores medianos permanecem constantes, embora cada ato particular dependa do acaso de um decisão voluntária do indivíduo e o mesmo é verdadeiro quanto ao número de nascimentos, uma vez que cada um deles depende da decisão voluntária dos progenitores. Assim também o número de mortes é influenciado pelo carater fortúito de uma decisão voluntária, pois a duração da vida é influenciada pela maneira de viver escolhida pelo indivíduo.

Cada acontecimento individual é imprevisivel, mas se os observarmos em grupos razoavelmente grandes e suficientemente estaveis, obteremos números aos quais se aplicam as proposições do cálculo de probabilidade. Isto implica em que sejam acontecimentos casuais. Os fatos são indiscutiveis e devemos perguntar: Como podemos conceber a relação entre as decisões voluntárias e as respectivas condições? Parece obvio que estes números exprimem uma lei que regula as decisões voluntárias. Muitos pensadores voltaram-se para a estatística afim de encontrar uma solução para o problema do livre arbítrio, e estas observações foram objeto das mais acaloradas discussões.

Observações relativas às alterações da população constituiram o primeiro problema da estatística, mas a sua importancia prática foi logo eclipsada pelo seu interesse filosófico ou teológico. O carater peculiar destas primeiras investigações pode ser melhor apreciado no título do trabalho de J. Arbuthnot, publicado em Philosophical Transactions de 1710-1712: "Um Argumento a favor da Divina Providencia Extraido da Regularidade Constante Observada nos Nascimentos de Crianças de Ambos os Sexos". Numerosas referencias ao interesse filosófico das regularidades estatísticas podem ser encontradas na literatura do século 18, como, por exemplo, na correspondencia entre Montmort e Nikolaus Bernoulli.

É facil compreender que as regularidades estatísticas tenham provocado o interesse dos filósofos. Quasi todas as estatísticas, mesmo que não apresentem grande interesse pratico, podem ser consideradas de um ponto de vista geral e tornar-se objeto de especulações filosóficas. Tomemos como exemplo a população total da Terra. Um indivíduo de inclinações religiosas e tendencias científicas, levantará a questão de saber, como todos os homens que vivem atualmente podem ser descendentes de um só casal, que viveu ha cêrca de 5.600 anos atrás. A hipótese de que a população aumenta em proporção geométrica é plausivel e, além disso, confirmada pela observação. Euler concedeu consideravel atenção a este problema. Alude a ele na sua: "Introductio in Analysin Infinitorum" e escreveu em 1760 um trabalho intitulado: "Recherches Générales sur la Mortalité et la Multiplication du Genre Humain", onde procura analisar a hipótese da progressão geométrica. Apresenta algumas suposições mais ou menos plausiveis e mostra que o aumento se processa segundo uma fórmula mais complexa, conhecida técnicamente como uma série recorrente. No inicio, os termos desta série variam com muita irregularidade, mas nos últimos termos o aumento é quasi idêntico ao dos termos de uma série geométrica.

O interesse teológico destas investigações pode ser apreciado tambem no título do trabalho de Süssmilch: "Die Göttliche Ordnung in den Veränderungen des menschlichen Geschlechtes". Este pensador provavelmente subscreveria a frase de Arbuthnot, de que a igualdade do número de homens e mulheres não é efeito do acaso, mas da Divina Providencia. É dificil, entretanto, aceitar o seu argumento. Uma pessoa de tendencias religiosas dificilmente duvidará de que esta igualdade, bem como qualquer outro fato, dependa da providencia, mas é dificil perceber por que a percentagem 50: 50 seria melhor prova que qualquer outra. O trabalho de Süssmilch é um dos livros mais importantes na história da estatística e exerceu grande influencia sobre os seus sucessores.

De inicio, a atenção dos investigadores voltou-se para a existencia destas regularidades e para as observações pelas quais podem ser verificadas. A discussão tornou-se animada quando os filósofos e os estatísticos se voltaram para a interpretação destes fatos. Quételet fez destas regularidades a base da sua doutrina do "homem medio", a qual afirma que a constancia dos números estatísticos é devida à constituição constante e invariavel do homem, em cujas ações o livre arbítrio se manifesta produzindo simplesmente perturbações acidentais. Esta doutrina nega o livre arbítrio e foi atacada por muitos pensadores, mas encontrou tambem muitos adeptos. As discussões foram tão animadas, para não dizer acaloradas, que por algum tempo os estatísticos pareceram mais interessados no problema do livre arbítrio que na coleta dos dados necessários para o seu trabalho prático.

As regularidades descobertas pela estatística pareceram constituir uma confirmação do ponto de vista de que as nossas decisões voluntárias teem causas necessárias e deram origem, em certos círculos, a um verdadeiro pânico. Os fatos observados foram considerados resultado de uma lei geral à qual obedeciam as ações humanas, mesmo que o seu efeito pudesse estar sujeito ao acaso em qualquer particular. Não existe diferença essencial entre este ponto de vista e o apresentado por Süssmilch, uma vez que ambos concordam em que as nossas decisões voluntárias são influenciadas por um elemento externo. Segundo um dos pontos de vista, Deus influencia as nossas decisões; de acôrdo com o outro, esta influencia é devida a leis misteriosas. Os partidários do livre arbítrio tentaram invalidar este argumento, quer afirmando que os resultados da estatística são irrelevantes nesta questão, quer argumentando que não se deve concluir da existencia das regularidades estatísticas a necessidade dos casos individuais. Os artigos desse tipo raramente demonstram grande originalidade de pensamento, e abrir caminho através dessas publicações não constitue ocupação muito agradavel.

A solução dada a este problema pelos matemáticos de Moscou é de tipo inteiramente diferente. Os representantes mais proeminentes desta doutrina são P. L. Tschebycheff, Nekrassow, W. G. Alexejeff e N. W. Bugajeff, lider da escola. Estes pensadores concorreram com importantes contribuições para o progresso da matemática e particularmente do cálculo de probabilidade e — por essa razão pelo menos — a solução que apresentam é interessante para nós. Raciocinam da seguinte fórma:

Afim de obter uma visão correta das regularidades estatísticas, os matemáticos de Moscou começam por considerar as condições sob as quais acontecimentos que individualmente são fortúitos, apresentam medias constantes quando tomados em grandes grupos. A resposta a esta questão é encontrada na proposição demonstrada por Tschebyscheff, de que a mais importante condição para aplicar o cálculo de probabilidade a medias observadas, consiste na suposição de que os acontecimentos são independentes entre si. Se a suposta independencia dos acontecimentos não existe, os teoremas relativos às médias não podem ser aplicados.

As ações humanas voluntárias são imprevisiveis e, quando tomadas em grandes grupos, demonstram possuir a constancia que se exige dos valores medianos. Segue-se daí que estes acontecimentos são independentes entre si. Todos os fenômenos da natureza são relacionados, por mais longínqua que possa ser esta relação. Isto significa que as decisões humanas voluntárias não fazem parte da cadeia de acontecimentos devidos à causalidade, pois de outra forma não poderia haver estabilidade nas medias. As regularidades observadas nas ações humanas voluntárias não só não constituem prova contra o livre arbítrio, mas são ainda uma demonstração da liberdade da vontade.

A argumentação dos matemáticos de Moscou não pára aqui, mas antes de continuar a examina-la devemos introduzir uma explicação técnica. Quando se abre um livro de física teórica, encontra-se um número imenso de equações, referindo-se cada uma a um fenômeno particular. Se se toma uma dessas fórmulas, fica-se sabendo tudo que se desejar sobre o fenômeno a que a mesma se refere. Essa fórmula realmente dá a descrição do fenômeno e todas as leis da física são expressas por fórmulas desse gênero. Quando uma fórmula exprime a relação entre o acontecimento A e uma ou mais condições B, C, ... dizemos que A é uma função de B, C, etc.

Na física lidamos com uma certa classe de função que é chamada analítica. Ha outras funções, chamadas não analíticas, mas por razões que discutiremos mais adiante, somente as funções analíticas são empregadas na física. Essas funções teem várias qualidades importantes que as tornam extremamente valiosas. Uma delas é o fato de que podem ser determinadas exatamente ou com qualquer grau prescrito de exatidão, por um numero finito de dados. Vamos supor que queiramos representar um fenômeno variavel como função do tempo. Procede-se a um número de observações suficiente para determinar esta função e, uma vez elaborada a equação, estaremos de posse de todas as informações necessárias. A fórmula nos capacita a descrever o fenômeno corretamente em qualquer dos momentos do tempo, momentos esses dos quais existe um número infinito. É muito curioso observar que um número finito — e, em muitos casos, consideravelmente pequeno — de observações, nos capacita a elaborar uma infinidade de enunciados corretos sobre o curso da natureza. Isto é consequencia da suposição de que a relação existente entre os acontecimentos em questão e o tempo é representada por uma função analítica.

As funções não analíticas geralmente exigem para sua determinação um número infinito de dados e isto equivale à afirmação de que não podem ser determinadas empiricamente. Os fenômenos que seguem leis representadas por funções não analíticas não podem ser estudados pelos métodos da física. A sua determinação exige um número infinito de dados e somente podemos dispôr de experiencia finita. Podemos observar o curso de tais acontecimentos, mas não podemos quer predizer o seu curso futuro, quer fazer qualquer afirmação sobre o passado. Isto significa que nunca poderemos obter um conhecimento teórico de fenômenos que obedecem a leis expressas por funções não analíticas.

Voltemos agora ao ponto em que deixámos o argumento dos matemáticos de Moscou. Argumentam eles que os fenômenos da natureza são representados por funções analíticas, e o fato de que um acontecimento da natureza pode ser descrito por meio de funções analíticas é equivalente à afirmação de que este acontecimento faz parte da cadeia de acontecimentos causalmente relacionados. É impossivel descrever a conexão entre as nossas decisões voluntárias e as suas condições por meio de funções analíticas, uma vez que não pertencem ao grupo de acontecimentos causalmente relacionados. Se esse não fosse o caso, poderiam não possuir a independencia provada pela existencia de regularidades estatísticas.

Este argumento é um dos mais notaveis "tours de force" da lógica. Como tal, permanece notavel, mesmo quando se está convicto de que deve conter um erro qualquer, porque prova demais. Quem apanhou o curso do raciocinio, pode ficar surpreendido pelo fato de não haver este argumento sido descoberto mais cedo. Tschebyscheff enunciou proposições exatas a respeito de acontecimentos que apresentam medias estaveis, mas antes dele já se sabia, embora de maneira mais ou menos vaga, que o cálculo de probabilidade só se aplica a acontecimentos independentes. Alguns acontecimentos exemplificam este fato de maneira muito convincente. Nas cidades mal construidas, um incendio que se inicia acidentalmente em uma casa, tem muita probabilidade de propagar-se às casas contíguas e transformar-se em uma conflagração. Em uma cidade bem construida, os incendios não se propagam facilmente e constituem acontecimentos independentes. Da mesma forma as estatísticas relativas a molestias contagiosas que facilmente se transformam em epidemias, fornecem um exemplo igualmente convincente deste ponto. Incidentalmente podemos observar que o emprego de funções não analíticas na descrição de fenômenos mentais foi sugerida tambem por Boussinesq, um francês.

Que devemos pensar do raciocinio dos matemáticos de Moscou? O seu argumento naturalmente é válido para todos os fenômenos aos quais se aplicam as proposições do cálculo de probabilidade. Aplicamos, porém, o cálculo de probabilidade a muitos acontecimentos que não podemos de fórma alguma considerar como estranhos ao campo dos acontecimentos causalmente necessários. As leis que regem o lance de um dado são perfeitamente conhecidas, mas a experiencia mostra que os resultados dos lances de um dado se conformam com as proposições do cálculo de probabilidade. Não pode também haver dúvida alguma de que a maré alta e a maré baixa sejam acontecimentos subordinados a leis estritas. Estas leis nos são perfeitamente conhecidas, mas se observarmos quantas vezes a maré matinal penetra em um certo ponto, sob a ponte de Londres, por exemplo, no primeiro, segundo, terceiro ou quarto de hora, verificamos que ha acôrdo completo com as normas do cálculo de probabilidade. Uma concordancia semelhante pode ser encontrada quando observamos a frequencia com que um certo algarismo, digamos zero, aparece na quinta casa decimal dos logaritmos dos números inteiros de 1 a 10.000. Neste exemplo podemos seguir cada caso individual em todos os seus detalhes e não resta dúvida quanto ao carater analítico das funções implicadas.

Não podemos aceitar o raciocinio dos matemáticos de Moscou. Se esse raciocinio pretende ser geral e referir-se a todos os fenômenos aos quais se aplica o cálculo de probabilidade, é evidentemente falso; se se declarar que se refere somente aos fenômenos mentais, é arbitrário. Existe uma certa similaridade entre os pontos de vista dos matemáticos de Moscou e os apresentados por Münsterberg.

9) **Acaso relativo.** — Se a causalidade fôr considerada universal, o acaso objetivo estará excluido. Podemos tentar basear a definição de acaso naquele atributo ao qual o acaso deve tanto da sua qualidade surpreendente, isto é, nas coincidencias temporais ou espaciais dos acontecimentos. Maldidier sugeriu que os termos sincronismo e sintopismo seriam muito convenientes para indicar abreviadamente estas coincidencias. O acaso relativo pode tambem ser interpretado quer de maneira objetiva, quer de maneira subjetiva. A interpretação objetiva afirma que estas coincidencias não são devidas a uma causa, enquanto que a concepção subjetiva admite uma causa, mas considera-a inaccessivel à nossa inteligencia.

Cournot diz que Jean de la Placette, que escreveu no século 17 sobre os jogos de azar, mantinha esse ponto de vista. "Quanto a mim, estou persuadido de que o acaso contém qualquer coisa de real e de positivo, talvez o concurso de dois ou mais acontecimentos contingentes, cada um dos quais tem suas causas proprias, mas de fórma tal que a sua concorrencia não possue causa alguma conhecida". Isto é uma formulação clara da concepção subjetiva do acaso relativo. Esta ideia tem grande atração para as pessoas de grande inteligencia e podemos encontra-la, por exemplo, nas obras de Goethe.

Escolhemos Schopenhauer como o moderno representante dessa doutrina. Argumenta ela da seguinte fórma. O acaso é a negação da necessidade. O conteudo lógico desta noção é negativo e indica a ausencia de conexões causais. O acaso, por esta razão, é sempre qualquer coisa negativa e cada acontecimento da natureza é ao mesmo tempo fortúito e necessário: necessário em relação às suas causas e fortúito em relação a tudo mais, pois sincronismo e sintopismo são coincidencias, são acontecimentos fortúitos sem conexão necessária. A necessidade do fenômeno individual é compreendida quando sabemos as causas, mas a coincidencia dessas diferentes causas, independentes entre si, aparece como fortúita. Realmente esta independencia é a essencia do acaso. Entretanto, uma vez que cada uma dessas causas é o resultado necessario de alguma outra coisa — de maneira que a cadeia da causalidade não tem inicio — o acaso é um fenômeno inteiramente subjetivo, devido à limitação da nossa inteligencia. É tão subjetivo quanto o horizonte ótico onde o ceo e a terra se encontram.

Schopenhauer ilustra a noção de cadeias causais independentes com o exemplo das relações genealógicas: quando existe um ancestral comum, temos dependencia; caso contrário, temos independencia. Se supusermos que todos os homens são descendentes de um só casal, teremos um parentesco universal. Se supusermos a existencia de vários casais originais, teremos o caso de cadeias causais independentes. Cournot usa o mesmo exemplo para ilustrar essa idéia. Ambos escreveram mais ou menos no mesmo período, mas as suas obras permaneceram praticamente desconhecidas na época. Uma vez que o exemplo das séries genealógicas exemplifica muito bem esse ponto, e como é pouco provavel que Cournot conhecesse os trabalhos de Schopenhauer, ou vice-versa, não temos motivo para supôr que um tenha tomado o exemplo do outro.

Este ponto de vista é um pouco mais preciso que o de Laplace, pois afirma que os sintopismos e os sincronismos são resultado do acaso. As coincidencias temporais e espaciais são sem dúvida características de um grande grupo de acontecimentos casuais, mas ha outros em que este ponto de vista exige uma modificação interessante.

Consideremos acontecimentos tais como o sexo de um nascituro ou a côr de uma bola que será retirada de uma urna. Neste caso, o acaso consiste no fato de um objeto determinado por qualidades espaciais e temporais possuir ainda outros atributos, como por exemplo, o fato de ser a criança um menino, ou ser branca a bola retirada. Esta coincidencia é diferente da que se observa quando duas bolas se encontram no ar. Aqui o acaso consiste no fato de que um indivíduo possue um atributo que não pode ser deduzido das suas proprias determinações temporais e espaciais. Neste ponto a doutrina do acaso relativo poderia ter evoluido para a doutrina do acaso lógico. Vamos designar pela letra A o grupo de proposições que caracteriza um objeto, e por B a afirmação de que este objeto possue um determinado atributo. Quando é possivel deduzir B de A por meio de processos exclusivamente lógicos, então podemos considerar B como necessário. Se, entretanto, não existir tal processo lógico, consideraremos como acidental a presença de B no objeto.

Se a causalidade fôr considerada universal, todos os atributos de um objeto, suas determinações temporais e espaciais inclusive, são necessários e teremos que aceitar a fórma subjetiva ou relativa do acaso. O acaso relativo será aceitavel somente se admitirmos uma doutrina tal como a de Renouvier, que postula o inicio absoluto das cadeias causais. Essa teoria implica no acaso objetivo e aceitando-a pouco se ganha para o cálculo de probabilidade.

Precisamos mencionar aqui uma curiosa solução do problema da causalidade conhecida por: "teoria da constituição fibrosa" do universo e que se deve a Arthur Balfour, que foi igualmente eminente como político e como pensador. Afirma ele que cada acontecimento está relacionado com cada um dos outros acontecimentos e é determinado pelo curso anterior do universo na sua totalidade. Relativamente às condições que influenciam um acontecimento existe uma hierarquia, de maneira que somente uma pequena parte delas exerce uma consideravel influencia que deve ser tomada em consideração em um estudo que pretende atingir um grau de exatidão correspondente a uma primeira aproximação. O ponto de vista de Balfour tem o mérito de tomar em consideração o estágio presente do conhecimento, deixando, ao mesmo tempo, lugar para novos progressos. Não pretende fornecer uma definição de acaso que possa ser util ao cálculo de probabilidade.

A doutrina do acaso relativo mostra claramente que as dificuldades começam a surgir somente no momento em que tentamos reconciliar a noção de acaso com os nossos pontos de vista científicos. A dificuldade se refere ao nosso pensamento e não às nossas percepções. Na vida diária não encontramos dificuldade em considerar como independentes dois acontecimentos que se verificam em lugares muito diferentes. Na maioria dos casos, a relação é tão remota que nem mesmo a mais refinada inteligencia poderia descobrir uma conexão. Para a nossa percepção, o mundo consiste em um número infinito de cadeias causais que, tal como as fibras de uma corda, tocam-se somente em alguns pontos, afim de continuar o seu curso independente por algum tempo e depois desaparecer.

10) **Acaso lógico.** — Os atributos contidos na definição de uma noção necessariamente pertencem a todos os elementos representativos do grupo, pois de outra fórma não poderia fazer parte deste. A presença de qualquer atributo em um elemento representativo desta noção é chamada acidental ou fortúita quando não pode ser deduzida da definição.

Esta noção tambem remonta a Aristóteles, que diz na sua Analitica Posterior: "Quanto aos acontecimentos casuais, devemos dizer que a respeito deles não é possivel elaborar-se uma ciência." A ciência trata apenas dos atributos necessários e não existe uma ciência do acaso. Devido a certas obscuridades existentes na doutrina da definição de Aristóteles, o significado desta frase não é muito claro. Diz ele que a definição dá a essencia de uma coisa e determina tambem sua existencia. Se os atributos de um objeto, que lhe pertencem pela sua essencia são necessários, esta frase pode significar que os atributos acidentais não são causalmente necessários. Esta interpretação está de acôrdo com os outros pontos de vista deste filósofo que não crê na causalidade universal. Não está estabelecido como certo que a passagem em que Aristóteles fala do acaso lógico deva ser interpretada em um sentido puramente lógico. Obtem-se a noção de acaso lógico somente quando a definição é considerada como uma construção inteiramente lógica, sem nenhum segundo sentido metafísico.

Um atributo de um objeto é acidental com referencia a uma noção em cuja definição ele não é contido. O acaso se refere à informação contida na definição e não devemos fazer referencia ao acaso sem declarar qual a informação que consideramos como dada. Qualquer parte da experiencia é resultado de certas condições que necessariamente produzem o acontecimento com todos os seus atributos. O mundo segue o seu curso e cada acontecimento é inalteravelmente determinado pelas condições anteriores. A noção de acaso tem sentido somente para o nosso pensamento. Esta noção pode ser aplicada somente quando formamos no pensamento uma noção e consideramos o objeto como representativo dela.

A noção "tirar bolas desta urna" é definida pela decisão: tirar bolas de uma urna que contem bolas brancas e pretas em determinada proporção e o ato de tirar é representativo dessa noção. Não dispomos de meios para deduzir a côr da bola que será retirada e o fato de ser branca constitue um acaso no sentido lógico da palavra. É facil ver como esta noção se aplica a outros acontecimentos habitualmente tratados no cálculo de probabilidade; vou exemplificar a noção de acaso lógico com alguns exemplos nos quais a independencia lógica não é tão facilmente visivel.

a) O axioma das paralelas é independente dos outros axiomas da geometria. Nos sistemas da geometria não euclidiana este axioma é substituido por outras proposições apropriadas que, em conjunto com os outros axiomas da geometria tradicional, levam a sistemas logicamente coerentes. A história mostrou que o axioma das paralelas não pode ser deduzido dos outros axiomas, isto é, que logicamente independe deles.

b) Uma equação diferencial está em relação de necessidade lógica relativamente à sua solução, uma vez que esta é derivada da primeira por processos inteiramente lógicos. As condições iniciais são logicamente independentes dela e existe uma infinidade de tais condições, coerentes com a equação.

c) Dois acontecimentos, x e y, estão relacionados de tal maneira que y é uma função $f(x; c_1, c_2, \ldots c_n)$ de x e das constantes $c_1, c_2, \ldots c_n$. Para cada constante existe um intervalo e todos os valores nele contidos são admissiveis. Atribuir uma série particular de valores é fortúito.

d) As flores de uma certa especie podem ser azues, brancas ou vermelhas. O aparecimento de uma côr determinada, azul por exemplo, constitue um acaso no sentido lógico.

A opinião de que a noção de acaso é aplicavel à ciência e particularmente ao cálculo de probabilidade é de natureza inteiramente lógica e conta, na época moderna, com muitos partidários. Vamos citar uma passagem de R. de Montessus: "Dado que certos acontecimentos teem um característico comum, e, por essa razão, constituem uma classe, mas diferem sob certos pontos de vista, o que permite colocá-los em categorias bem definidas, o acaso consiste na ausencia de relações bem definidas entre as causas que colocam tal acontecimento de tal classe nesta categoria e os caracteres distintivos desta categoria." Desde que não existam entre as classes relações de especie alguma a não ser as lógicas, temos aqui a doutrina do acaso lógico na sua fórma pura. Além disso citamos G. Helm, F. Jodl e W. Windelband como expoentes do ponto de vista de que a noção de acaso lógico é a única que pode ser usada coerentemente na ciência.

A. A. Cournot não emprega o termo acaso lógico, mas, na minha opinião, não resta dúvida de que deve ser classificado entre os partidários desse ponto de vista. Ele parte do acaso relativo e discute o fato de que as duas cadeias causais, na coincidencia espacial ou temporal em que consiste o acaso, seguem as leis G_1 e G_2 respectivamente. Não importa saber se estas leis são ou não enunciadas sob a fórma de uma função matemática. Quando existe um grupo de condições V_1, das quais podemos deduzir G_1 mas não G_2, então dizemos que G_1 é independente de G_2. Da mesma fórma dizemos que G_1 é independente de G_2, quando existe um grupo de condições V_2 das quais podemos deduzir G_2 mas não G_1. As proposições G_1 e G_2 são consideradas mutuamente independentes quando G_1 é independente de G_2 e G_2 é independente de G_1. Nesse caso é hábito dizer que as duas proposições não podem ser derivadas das mesmas suposições. Tais proposições são acidentais uma em relação à outra. Pode ser que Laplace tenha razão ao dizer que o número de leis naturais é pequeno, mas é suficiente que existam duas leis mutuamente independentes para garantir ao acaso o seu lugar no curso do universo.

O acaso lógico permanece, mesmo quando o nosso conhecimento é completo. A nossa teoria dos eclipses do sol e da lua é suficientemente avançada para ser apresentada de fórma matemática. Isto significa que possuimos conhecimento completo desses fenômenos, mas isto não nos impede de deduzir pelas regras do cálculo de probabilidade a proporção do número de eclipses do sol e da lua que serão visiveis de um determinado lugar. Nesses cálculos, consideramos os eclipses visiveis em um dado lugar como acontecimentos casuais, e vemos que a aplicação da noção de acaso é justificada mesmo quando o nosso conhecimento alcançou a perfeição. É evidente que se tratando de eclipses somente a noção de acaso lógico é admissivel.

A segunda fonte de acaso, segundo Cournot, é encontrada no que chama os dados históricos no curso do universo. Estes devem ser aceitos como dados e não admitem uma dedução de leis naturais. Um indivíduo, que não fosse onisciente, mas cuja inteligencia fosse muito superior à nossa, poderia penetrar muito mais profundamente que nós na análise das fases pelas quais passou o sistema planetário, mas eventualmente encontraria uma série de dados que resistiriam à análise pela teoria. Esses dados devem ser aceitos como fatos históricos, isto é, como resultado da cooperação de causas que se situam ainda mais remotamente no tempo. Com um pouco de atenção podemos reconhecer que os dados históricos de Cournot correspondem ao tipo de acontecimentos fortúitos mencionados acima sob a letra c. Os dados históricos fornecem as condições iniciais e determinam o acontecimento que realmente se verifica. A função dá a lei que o acontecimento segue, e as constantes determinam o acontecimento quanto à sua individualidade. O conhecimento somente da função não nos capacita a determinar o acontecimento que realmente se verifica. Para isto necessitamos os valores numéricos das constantes que devem ser encontrados por meio da observação.

Cournot, filósofo e pensador de primeira plana, não exerceu praticamente influencia alguma sobre os seus contemporâneos. Era um excelente administrador e bem cedo alcançou uma alta posição a serviço do governo. Este êxito militou contra a sua classificação como pensador, pois as pessoas são geralmente refratárias a reconhecer a eminencia de um homem em dois campos diversos. Os seus contemporâneos consideravam o seu trabalho no setor da lógica como um simples divertimento, que toleravam, mas se recusavam a tomar a sério. É ainda mas curioso que homens como Windelband e Kries não tivessem compreendido a importancia do trabalho de Cournot. Escreveram após a morte deste e, como pertenciam a outro país, não se deixariam influenciar pela sua alta posição oficial. No inicio deste século, um grupo de franceses eminentes tentou fazer justiça ao trabalho de Cournot. E. Czuber tem o mérito de haver explicado a importancia de Cournot ao público em geral. Não se pode dizer que Cournot tenha feito progredir o lado técnico do cálculo de probabilidade, mas os seus pontos de vista sobre os principios dessa ciência são novos e originais.

Tomo a liberdade de tentar adivinhar a razão pela qual as ideias de Cournot permaneceram esquecidas por tão longo tempo. Os matemáticos gostam das ideias precisas e apreciam as especulações relativas aos principios das respectivas ciências, mas somente quando podem ser prontamente transformadas em fórmulas. Desejavam naturalmente que lhes mostrassem como esta noção de acaso lógico poderia ser usada para definir a probabilidade matemática. Isso, como veremos em uma das aulas futuras, pode ser feito por meio das proposições do ramo da matemática conhecido por "teoria das classes" em inglês, "théorie des ensembles" em francês e "Mengentheorie" em alemão. A teoria das classes não existia na época de Cournot, pois as primeiras contribuições nesse campo surgiram por ocasião da sua morte. No inicio deste século, a teoria das classes estava bastante desenvolvida e a pesquisa de Bertrand Russell sobre os principios da matemática exerceu uma tremenda influencia sobre o espírito de todos os estudiosos. Alguem teria a ideia de empregar o acaso lógico como base sobre a qual se poderia construir o cálculo de probabilidade, de acôrdo com as regras da teoria das classes. Isso era apenas uma questão de tempo. Foi o que fiz nos meus trabalhos sobre esse problema, e tive a satisfação de ver que muitos anos mais tarde Bertrand Russell apresentou uma solução essencialmente idêntica.

CAPITULO III

OS SISTEMAS ABSTRATOS DE PENSAMENTO

1) **Normas de coexistencia** — As proposições por meio das quais formulamos a nossa experiencia do mundo exterior dividem-se em dois grupos: as normas de coexistencia e as normas de sucessão. O primeiro grupo contém formulações relativas a objetos que persistem no tempo, como por exemplo: O monte Etna é um vulcão. Ao segundo grupo pertencem afirmações sobre a sucessão dos acontecimentos no tempo, como por exemplo: O sol levanta-se a leste, culmina no zenite e põe-se a oeste. Esta proposição dá a ordem em que se sucedem os acontecimentos "levantar-se", "culminar" e "pôr-se".

Nos enunciados do primeiro grupo, o sujeito indica um objeto definido pelos atributos a, b, ... m ao qual pertence o atributo indicado no predicado. Este fato é indicado pela proposição "A é n". Objetos que possuem somente os atributos a, b, ... m e nenhum outro, existem somente no nosso pensamento. Nenhum objeto na sua individualidade é inteiramente descrito por qualquer grupo finito de atributos, por maior que seja esse grupo. Qualquer objeto que faz parte da realidade possue um número infinito de atributos, mas ao formar as nossas noções usamos somente um número muito pequeno deles. A formação das palavras e das noções que empregamos na vida diária é um processo cujas normas são estudadas pela psicologia social. Em outros casos é arbitrária. Quando é fantasiosa, obtemos noções tais como as que figuram nas Mil e Uma noites e outras obras poéticas semelhantes. Quando tentamos torna-las exatas, chegamos às noções profundamente artificiais da ciência. São construções abstratas cuja formação é determinada meramente pelo objetivo ao qual se pretende que sirvam.

Na proposição "A é n" o sujeito, bem como o predicado, são noções e, como tais, definem grupos de objetos. O predicado n define os grupos mais largos dos quais o sujeito A é parte. O valor dos enunciados de coexistencia depende do grupo ou classe definida por A.

No nosso exemplo as palavras "Monte Etna" referem-se a um só objeto e a classe define somente um membro. Na proposição "Os paises da América do Sul são repúblicas", a classe definida pelo sujeito tem um número finito de membros e na proposição "Os números primos maiores que dois são ímpares" a classe é infinita. Existem tambem classes que não conteem elemento algum e são chamadas vazias.

As proposições da fórma "A é n" teem diferentes valores para o conhecimento, conforme A se refere a uma classe de um ou mais membros. No primeiro caso, trata-se de um fato individual que se dá uma vez e nunca se repete. Não faz diferença que seja um fato histórico, como: "Cesar atravessou o Rubicon", ou que seja uma afirmação sobre as posições dos planetas em um determinado momento. No segundo caso a proposição implica que encontramos o atributo "n" sempre que encontramos o grupo de atributos a, b, ... m. Os atributos dos objetos não se acham espalhados a esmo sobre a experiencia, mas estão agrupados de certa fórma, de acôrdo com as normas de coexistencia.

2) **Normas de sucessão** — Vamos definir o objeto A pelos atributos a, b, ... m. Observamos A nos momentos t_1, t_2, ... t_n e verificamos que A possue os atributos:

x_1, y_1, z_1 no tempo t_1
x_2, y_2, z_2 no tempo t_2
x_n, y_n, z_n no tempo t_n

Estes fatos oferecem a oportunidade de introduzir a noção de um objeto em mudança. Chamamos o grupo de atributos x_1, y_1, ... z_1; chamamos x_2, y_2, ... z_2; ... x_n, y_n, ... z_n as fases através das quais A está passando e designamo-las pelas letras Z_1, Z_2, ... Z_n. A série de fases chama-se um processo, que se inicia no tempo t_1 e termina no tempo t_n. Um processo é uma série de fases ordenada com referencia ao tempo em que estas existem.

Um processo descreve um único fenômeno individual. Podemos formar classes de processos que teem algum atributo em comum. A definição de uma classe de processos que contem mais de um elemento é uma norma de sucessão. O fato de que tais normas existem, prova que os acontecimentos no curso da natureza não se seguem acidentalmente, mas demonstram uma regularidade que pode ser estudada.

Fases que consistem em um número finito de atributos existem somente no nosso pensamento. Segue-se daí que os processos que consistem nas mudanças de um número finito de atributos existem somente no nosso pensamento. Todos os processos que se desenrolam no mundo real estão ligados a um número indefinido de processos que se verificam no objeto A.

A necessidade indicada nas normas de coexistencia e sucessão é exclusivamente lógica. Baseia-se no fato de que somentes os objetos que possuem os atributos exigidos podem constituir elementos das classes. O curso da natureza como um todo, bem como o de qualquer uma das suas partes, é único e não tem sentido afirmar ou negar a sua necessidade. Os objetos e os processos da natureza são como são, e devemos toma-los tais quais. Podemos considerar necessário um processo somente depois que se tornou, por abstração, objeto do nosso pensamento. As normas de coexistencia e de sucessão descrevem os fenômenos não na sua individualidade mas somente pelos seus característicos gerais.

Ha processos que se iniciam com uma fase constante Z que, pela acessão do atributo Z' se transforma em Z_1, que é seguido pela série Z_2, Z_3, ... que leva à faze Z_n, que de novo é constante e varía muito lentamente. Fatos desta especie oferecem a oportunidade de introduzir a noção de causa e efeito. Z' é chamado causa e Z_n, efeito.

As noções de causa e efeito são mais de valor prático que lógico. Pode acontecer que Z seja encontrado com muita frequencia, ao passo que Z' pode ser raro ou depender de uma decisão humana voluntária. No último caso, o indivíduo implicado é considerado como causa do processo e responsabilizado pelas consequencias. Do ponto de vista lógico o fato de que Z' ascendeu até o último atributo para constituir Z_1, não tem importancia lógica. As fases que constituem o processo se desencadeiam quando a condição inicial Z_1 se verifica, independentemente da ordem em que os atributos se juntaram. É facil, muitas vezes, idear uma situação experimental em virtude da qual a acessão não de Z' mas de um atributo inteiramente diferente, inicia o processo.

Não devemos subestimar a força psicológica dos motivos que nos levam a pensar em termos de causa e efeito, e que militam contra a concepção exclusivamente lógica dessas noções. Estes dois termos são tambem muito uteis para exprimir abreviadamente certos assuntos complexos. Uma legião de escritores, entre os quais os mais profundos pensadores, tentou libertar as noções de causa e efeito da contradição e torna-las coerentes, mas todos esses esforços falharam. Parece melhor evitar as dificuldades inelutavelmente ligadas às noções de causa e efeito, considerando-as simplesmente como conceitos lógicos.

3) **As leis naturais** — Agora limitaremos as nossas considerações aos casos em que um ou mais atributos de um objeto teem carater quantitativo e admitem uma determinação numérica. As normas de coexistencia e de sucessão, neste caso, devem assumir a fórma de uma função matemática. Esta, realmente, é a única maneira de fazer afirmações sobre as relações entre classes infinitas, excetuando alguns casos triviais. Nas normas de sucessão, o tempo é a variavel independente e a função dá a relação pela qual é encontrado, para cada momento do tempo, o valor correspondente do atributo quantitativo. As normas de coexistencia enunciam a relação existente entre classes de atributos, nenhuma das quais é a classe dos momentos do tempo.

Na noção de Lei Natural unimos as normas de coexistencia e de sucessão. Uma lei natural é a relação entre os elementos de duas ou mais classes de objetos empiricamente encontrados. A palavra "relação" deve ser tomada no seu sentido estritamente lógico, isto é, como uma relação de um para um entre os elementos das classes A e B, quando, para cada elemento de A, corresponde um certo elemento de B.

Todas as leis são gerais, porque são válidas para todos os elementos das classes abrangidas. Quando a classe designada pelo sujeito contem somente um elemento, empregam-se os termos "fato histórico" ou "fato da experiencia". Quando a classe do sujeito contem mais de um elemento, esses elementos são necessariamente diferentes, pelo menos quanto às determinações temporais e espaciais. Uma vez que a lei é válida para todos os elementos, segue-se que as leis naturais são independentes do tempo e do espaço, isto é, devem ser válidas em qualquer lugar e a qualquer tempo.

Isto equivale à suposição de que um processo deve desenrolar-se em todos os lugares e em todos os tempos da mesma maneira, sempre e onde quer que seja que se verifique a condição inicial. Alguns autores designam esta suposição pelos termos algo poéticos de "onipresença das forças da natureza". Os autores ingleses, entre eles Russell e Keynes empregam a expressão mais moderada: "uniformidade da natureza". Quero observar aqui que esta suposição desempenha importante papel na teoria da indução, e que pode ser formulada de maneira abstrata, o que, entretanto, exige alguns conceitos de matemática não elementar.

A suposição da uniformidade da natureza está intimamente associada aos nossos processos de pensamento, mas não parece ser um elemento necessário ao pensamento. Sem dúvida não tem o mesmo carater, por exemplo, dos principios de contradição, como se pode verificar pelo fato de que podemos altera-la sem cair em contradição. Muitos filósofos propuseram a ideia de uma evolução das leis da natureza, o que implica em que processos, que se iniciam partindo das mesmas condições iniciais, seguem cursos diferentes quando o tempo que media entre eles é suficientemente longo para permitir que as leis implicadas evoluam, isto é, tornem-se diferentes. A nossa relutancia em aceitar esta ideia pode ser devida à nossa maneira de pensar sobre o tempo. É fato que as nossas ideias sobre o espaço evoluiram e que os antigos gregos não teriam feito objeção contra a suposição de que a mesma fase inicial pudesse produzir processos diversos em diferentes partes do mundo. Os seus filósofos afirmavam que os acontecimentos que se passam na terra e os que se verificam no céu seguem leis inteiramente diferentes, um ponto de vista que os satisfazia, mas que repugna à nossa maneira de pensar.

4) **Sistemas de sinais** — Um grupo de atributos chama-se noção. A seleção dos atributos pelos quais caracterizamos um objeto ou uma fase é, em muitos casos, sugerida pela experiencia, mas nada nos impede de proceder a essa escolha de maneira inteiramente arbitrária. O mesmo é verdadeiro em relação à definição de processos, pois então a liberdade de escolher a fase inicial e final vem juntar-se à liberdade de elaborar as noções correspondentes ao sujeito e ao predicado. Uma sentença que caracteriza a palavra com a qual pretendemos designar um certo grupo de atributos é a definição dessa palavra. Uma definição absolutamente não

garante que existam na experiencia real objetos que lhe correspondam.

As palavras escritas ou faladas são sinais dos grupos de atributos por elas designados. Todas as línguas possuem, além do seu acervo de palavras, uma gramática, isto é, um sistema de regras segundo as quais são construidas as sentenças por meio da combinação das palavras. Do ponto de vista da lógica, uma sentença é um sinal da relação nela enunciada. Não ha limites para a formação de sentenças. As regras da gramática são uteis na formação de novos sinais, mas é possivel conceber a formação de sinais para sentenças de maneira tão arbitrária quanto a que presidiu à formação das palavras. Algumas línguas primitivas aproximam-se bastante desse método, pois usam, por exemplo, palavras diferentes para designar um veado correndo e um veado parado.

As regras da gramática podem ser comparadas com as regras que regem a manipulação dos símbolos algébricos ou os movimentos das pedras no xadrez. Situamse no mesmo nivel que qualquer outra coleção de regras semelhante. Uma proposição pode ser gramaticalmente correta sem entretanto corresponder a dado algum da experiencia.

Vamos usar o termo "experiencia imediata" para designar as nossas percepções sensoriais. A experiencia imediata inclue as impressões errôneas produzidas pelas ilusões de ótica como, por exemplo, o fato de uma vara parcialmente imersa na agua parecer quebrada. Designaremos pela palavra "experiencia" a totalidade das nossas percepções sensoriais, mais as consequencias delas derivadas por processos lógicos.

Quando existem na experiencia objetos aos quais pertencem os atributos enunciados em uma sentença, estas sentenças constituem sinais ou imagens desses fatos, no sentido lógico da palavra. A ciencia procura elaborar uma série de sinais — isto é, de sentenças faladas, escritas ou impressas — cada uma das quais é um sinal de um objeto dado pela experiencia. Temos liberdade de aumentar indefinidamente o número desses sinais e dessa maneira damos imagem a um número sempre crescente de objetos dados pela experiencia. Um grupo de sinais, pelos quais damos imagem a uma certa parte da experiencia, chama-se: ciencia. Esta é a maneira pela qual compreendemos a famosa proposição de H. Hertz de que a finalidade da ciência é dar uma imagem da experiencia.

Hertz formulou este princípio e tirou, com grande precisão, as consequencias dele resultantes para a mecânica. A ideia básica, entretanto, é tão simples que seria de admirar que opiniões semelhantes não houvessem sido apresentadas antes de Hertz. Poderiamos considerar Bacon como seu antecessor, pois diz: "A ciência é a imagem da realidade", mas a palavra "realidade" tem um ressáibo de filosofia aristotélica. A mesma ideia é claramente expressa — e sem alusões metafísicas — na seguinte passagem de Lavoisier: "Toda ciência é formada por tres coisas: os fatos, que a constituem; as ideias, que os evocam; as palavras que os exprimem; a palavra deve fazer nascer a ideia, a **ideia deve pintar o fato; são tres imagens do mesmo sinete**". Ha, entretanto, uma diferença na atitude destes dois homens. Para Lavoisier, essa ideia significa apenas a oportunidade de escrever uma frase bem torneada, enquanto que para Hertz é um elemento do seu pensamento científico.

Nessa proposição, a palavra "imagem" deve ser tomada no seu sentido lógico. O sentido vulgar dessa palavra exige uma similaridade entre a imagem e o seu objeto, e evidentemente não existe tal semelhança entre as proposições da ciência e os objetos a que se referem. Tomemos como exemplo um processo físico e sua descrição impressa. Existe uma semelhança entre os estados mentais que experimentamos ao observar na realidade o processo e ao ler a sua descrição, mas entre o processo e a descrição impressa ou oral não ha semelhança, no sentido vulgar da palavra.

Uma proposição P está na relação de dependencia lógica para com um dado grupo de proposições G, quando P pode ser deduzido de G por meio de processos puramente lógicos. G é suficiente para a dedução de P e escrevemos então: G c P. Quando não existe nenhuma relação dessa especie, escrevemos: G c| P. As proposições sem as quais P não pode ser deduzido são necessárias para a dedução de P. Uma demonstração de P deve ser baseada em um grupo G que é necessário e suficiente para a dedução de P.

Referimo-nos a um sistema quando várias proposições P_1, P_2, ... podem ser deduzidas de um dado conjunto G. Alguns destes sistemas conteem muitas proposições e, aparentemente, podem ser aumentados quasi que indefinidamente. Para as proposições relativas a G, usam-se os termos: axiomas, proposições fundamentais, postulados ou hipóteses. Os axiomas devem ser independentes entre si, pois se um deles não fôr, poderiamos deriva-lo dos outros e então continuar com as nossas demonstrações, tal como vínhamos fazendo. O grupo de axiomas $a_1, a_2, \ldots a_n$ e as proposições $P_1, P_2, P_3, \ldots$ formam um sistema quando os axiomas são independentes entre si e as proposições $P_1, P_2, P_3, \ldots$ podem ser deduzidas dos axiomas. Essa definição se escreve: Os axiomas $a_1, a_2, \ldots a_n$ e as proposições $P_1, P_2, P_3, \ldots$ formam um sistema, quando temos a_1 c| a_2, a_2 c| a_3, ... a_{n-1} c| a_n bem como G c P_1, G c P_2, G c P_3, ... O segundo grupo de relações expõe a dependencia lógica das proposições derivadas, e o primeiro estabelece a mútua independencia lógica dos axiomas.

Todos os conjuntos de axiomas devem conter as regras da lógica. Parece que não nos é possivel passar sem elas. Recentemente, os lógicos puseram-se a estudar as consequencias que adviriam de abandonar ou alterar alguns dos princípios lógicos. Se assim fizermos, ou não obteremos consequencia de espécie alguma, ou teremos um número excessivo delas. Se abandonarmos o princípio da contradição, que afirma que nenhum objeto pode ter ao mesmo tempo, os atributos A e não-A, vemos que cada proposição e o seu contrário estarão incluidos no sistema resultante.

Qualquer axioma que não seja de carater inteiramente formal, pode ser eliminado e substituido por uma proposição diferente. As consequencias derivadas deste novo conjunto de axiomas não levam a contradição, e o seu sistema é tão coerente quanto aquele derivado do conjunto original.

5) **A verdade lógica e a verdade empírica** — A verdade lógica de uma proposição consiste no fato de não existir contradição entre ela e um dado grupo de outras proposições. A verdade lógica implica em uma referencia a um determinado grupo de proposições e não tem sentido falar da verdade lógica de uma proposição sem indicar implícita ou explicitamente o grupo de referencia. Quando uma proposição é logicamente verdadeira com referencia a um certo grupo de axiomas, deve pertencer ao grupo de consequencias deles deduzidas, e por esta razão é logicamente necessária. Uma proposição

que é logicamente verdadeira com referencia ao grupo de axiomas M, é logicamente falsa com referencia a qualquer outro grupo de axiomas M', diferentes de M.

As proposições que conteem uma contradição são logicamente falsas com referencia a qualquer grupo de axiomas logicamente coerentes.

Prova-se a verdade lógica de uma proposição demonstrando como pode ser deduzida do grupo de referencia. Prova-se que é logicamente falsa mostrando que está em contradição com uma ou mais proposições derivadas do conjunto dado. Neste caso podemos demonstrar que o oposto lógico da nossa proposição pertence ao sistema de consequencias derivadas dos axiomas.

Além das proposições cuja verdade ou falsidade lógica podemos demonstrar, ha proposições em relação às quais nenhuma dessas duas demonstrações é possivel. Não temos meios de demonstrar se a proposição pertence ou não ao sistema de consequencias a serem tiradas dos axiomas dados. Dizemos que essas proposições são possiveis com relação ao conjunto de axiomas dado. Atualmente, por exemplo, não temos meios quer de demonstrar, quer de refutar a afirmação de que e^{π} é um número algébrico e exprimimos esse fato dizendo que é possivel, com relação ao conhecimento de que dispomos atualmente, que e^{π} seja um número algébrico. Uma expansão futura do conhecimento aritmético talvez nos possibilite fazer uma afirmação positiva sobre o carater desse número; a proposição então deixará de ser possivel, mas isso não altera coisa alguma no fato de que a proposição é apenas possivel com referencia ao conhecimento de que dispomos atualmente.

Os axiomas mutuamente independentes não são logicamente nem verdadeiros nem falsos em relação uns aos outros. Não existe a relação de dependencia lógica entre eles e logicamente são somente possiveis com relação uns aos outros.

Os sinais produzidos pela ciência evocam em nós certos pensamentos e por essa razão podemos falar em sistemas de pensamento, tanto quanto em sistemas de sinais. O interesse pela construção desses sistemas seria pequeno se não existissem alguns sistemas nos quais cada proposição é imagem de um fato da experiencia. Consideramos uma propriedade como empiricamente verdadeira quando a relação nela afirmada constitue uma descrição correta de um fato da experiencia. Dizemos que um sistema é empiricamente verdadeiro quando todas as suas proposições possuem o carater de verdade empírica. Se não insistíssemos na verdade empírica dos sistemas abstratos de pensamento, a sua construção pouco mais seria que uma oportunidade para exercitar a destreza lógica. Gozamos de completa liberdade na escolha dos nossos axiomas e nada nos impede de escolhe-los de tal maneira que as proposições deduzidas descrevam acontecimentos fantásticos. A existencia real dos objetos a que se faz referencia nesses sistemas não é nem uma suposição, nem a finalidade da demonstração. Interessamo-nos pelos sistemas que são empiricamente verdadeiros porque queremos falar sobre acontecimentos reais e não sobre os objetos da imaginação fantasiosa, mas este interesse é um fato psicológico e, como tal alógico.

Um fenômeno da natureza é explicado demonstrando de que fórma a proposição que o descreve pode ser obtida como consequencia lógica de um dado grupo de proposições. Uma explicação sempre depende dos axiomas dos quais partimos e, por essa razão, possue somente valor hipotético. A explicação será diferente conforme as hipóteses das quais partirmos. A palavra "hipótese" indica o carater duvidoso das suposições envolvidas, enquanto que um axioma é frequentemente considerado como indiscutivel. Esta distinção não alcança o âmago do assunto, isto é, que as proposições fundamentais das quais partimos são sempre arbitrárias. A palavra "postulado" não tem esses segundos sentidos e parece mais adequada para indicar as proposições fundamentais. Os sistemas que conteem, além dos principios da lógica, somente proposições empiricamente verdadeiras, apresentam um interesse particular.

Um exemplo famoso de tal sistema é encontrado no tratado "Dos corpos flutuantes" de Arquimedes. Partindo de alguns teoremas geométricos, define ele o que pretende entender por "líquido". Põe-se então a tirar conclusões e demonstra, por exemplo, que a superficie de uma gota deve ser esférica; que um corpo de densidade igual à do líquido deve afundar até que seja completamente submergido, etc. As demonstrações se sucedem tal como em um manual de geometria, e muitas delas são apagógicas. As provas apresentadas seriam igualmente imperativas e convincentes mesmo que não existissem líquidos no mundo. Isto se refere à verdade lógica do sistema. A verdade empírica do sistema é devida ao fato de que existem na nossa experiencia objetos que são líquidos no sentido atribuido a essa palavra por Arquimedes. Se considerarmos, por exemplo, os resultados das observações reais sobre os vasos comunicantes, veremos que será possivel deduzi-los como uma das proposições da teoria, pelo que são explicados.

Todas as proposições empiricamente verdadeiras situam-se no mesmo nivel. Pode acontecer que algumas delas cheguem ao nosso conhecimento mais cedo que outras, ou que algumas possam ser observadas frequentemente e outras apenas raramente. Todas essas diferenças são, logicamente, despidas de importancia. Nem é a posição de uma proposição influenciada pelo fato de que pode ser obtida como consequencia lógica de outras, desde que todas as proposições implicadas sejam empiricamente verdadeiras, pois todas elas são simplesmente afirmações de fatos. Nada devemos concluir relativamente à ordem das coisas envolvidas, com base na ordem em que as proposições de um sistema são apresentadas, como faz Spinoza. As proposições sobre as quais baseamos uma explicação podem ter a vantagem de ser mais familiares para nós, mas são tanto afirmações empíricas quanto as proposições a serem explicadas.

Todas as consequencias deduzidas por processos puramente lógicos de uma proposição empiricamente verdadeira, devem ser empiricamente verdadeiros. Isto parece uma frase metafísica, mas, na realidade, não é. As proposições da lógica dão as regras para a transformação tautológica, o que significa apresentar sob outra fórma o conteúdo lógico das proposições. Deixam o conteúdo inalterado e apresentam-no simplesmente de uma maneira nova.

Isso nos pode levar a crer que a melhor maneira de demonstrar a verdade empirica de um sistema consiste em provar as proposições fundamentais. Na maioria dos casos, entretanto, essa prova é impossivel, porque os axiomas são altamente abstratos e inaccessiveis a uma experimentação direta. Diante desta impossibilidade, o único caminho que nos resta consiste em provar a verdade de todas as proposições do sistema. Esta tarefa é extremamente laboriosa. O que nos interessa principalmente é sistematizar a física e a biologia, setores em que cada dia traz novos esclarecimentos, de maneira que a tarefa de sistematiza-los não tem fim e assemelha-se realmente ao trabalho das Danáides. O fato é que a verdade dos nossos axiomas deve ser provada pelas conclusões que deles possamos tirar. Os axiomas não são absolutamente as proposições das quais estejamos mais certos, nem constituem verdades fóra de discussão. A sua importancia reside no fato de que somos obrigados a aceita-los se quizermos continuar a fazer deduções.

Uma pequena anedota poderá servir para ilustrar este ponto. Ha cerca de tres anos atrás, a minha familia teve a honra de hospedar Bertrand Russell em Oslo. Querendo divertir-me um pouco com ele, treinei meus filhos em um dos pontos mais importantes da doutrina lógica de Russell, isto é, a definição de implicação. Essa definição diz o seguinte: a proposição "p implica q" significa: "Se não tivermos q não teremos p". Dirigimos a conversa de maneira que viesse à baila a questão da generalidade dessa definição. A resposta veio como um tiro disparado de uma espingarda: "Essa é a **minha** definição de implicação. Se não a aceitarem, verão onde irão parar".

O primeiro requisito para a construção de um sistema abstrato é um íntimo conhecimento dos fenômenos a serem descritos. A coleta dos fatos é a base de qualquer ciência. Começamos com proposições de restrita generalidade, cuja origem empírica é mais ou menos evidente. Isto é verdadeiro não somente em relação às ciências naturais, mas tambem para a matemática, como demonstra o inicio do desenvolvimento da álgebra no Egito. O corpo de conhecimentos cresce e gradualmente vamos apreendendo a conexão das proposições pertencentes ao mesmo grupo. Hoje o noso conhecimento consiste em um certo número de ciências que dão uma imagem bastante exata dos fenômenos descritos, mas manteem entre si conexões relativamente frouxas. Temos nos esforçado no sentido de conseguir uma unificação das ciências e alcançámos alguns êxitos notaveis. Ao ensinar uma ciência, só excepcionalmente são os seus principios apresentados logo de inicio, mas costuma-se antes introduzir uma hipótese após outra, à medida que o exige o curso das demonstrações.

Não insistirei sobre o valor prático destes sistemas, o que, na época da bomba atômica, é evidente por si mesmo. Prefiro observar que os primeiros sistemas deveram-se a homens que não estavam absolutamente interessados nas aplicações práticas e mesmo hoje a grande maioria dos investigadores interessa-se apenas pelo problema abstrato. O motivo psicológico que leva um homem ou uma mulher a empreender esse dificil trabalho é provavelmente diferente para cada um. Talvez haja alguns traços comuns nesses motivos, como por exemplo a atração que qualquer problema abstrato oferece quando é reconhecido como tal ou o desafio que reside na propria dificuldade.

Sejam quais forem as razões psicológicas, o fato é que estamos constantemente alargando e unificando os sistemas existentes. Parece que o objetivo dos nossos esforços é a elaboração de um sistema, construido sobre um número limitado de axiomas e capaz de dar uma imagem completa de toda a experiencia. É dificil ser otimista ao julgar as possibilidades de alcançar esse objetivo. Naturalmente temos, para nos animar, o exemplo da geometria, mas a construção de sistemas capazes de abranger um campo relativamente grande da experiencia é muito dificil. Somente na mecânica estes esforços teem obtido um êxito relativo, mas não completo. Talvez ainda vejamos todo o campo da física coberto por um só sistema, mas então restará o problema de encontrar a conexão com as ciências biológicas. Neste setor a sistematização tem feito poucos progressos, e parece-me que o trabalho de Hull é a sua mais notavel conquista. Este e os seus companheiros de trabalho empregaram muito tempo no problema da formulação dos principios da psicologia objetiva, mas o seu trabalho ainda não está terminado e o proprio Hull está constantemente procurando melhorar as suas proposições fundamentais.

Ainda que fosse possivel encontrar um sistema totalmente inclusivo, não teriamos, ainda assim, uma garantia de que fosse realmente exaustivo, no sentido de que todos os fenômenos naturais tivessem sua imagem em uma das suas proposições. A existencia de um sistema dessa especie não exclue a possibilidade de que repentinamente se possa deparar com um fenômeno que nele não se encaixe.

Diante da impossibilidade de encontrar um sistema inclusivo, fazemos o máximo que nos é possivel dentro das condições existentes: construimos sistemas de extensão limitada e dispomo-los de tal maneira que uma ampliação do conhecimento por meio de novas experiencias produza uma alteração tão pequena quanto possivel. Resignamo-nos ao fato de que a perfeição é inatingivel e deixamos a cargo das investigações futuras decidir se é ou não possivel encontrar uma conexão entre os diferentes sistemas de alcance limitado. Realizamos o nosso trabalho em campos limitados da melhor fórma ao nosso alcance e recusamo-nos a nos deixar arrastar a generalizações prematuras. Os sistemas que construimos são provisórios, não definitivos.

Os nossos sistemas devem ser tão estaveis quanto possivel. Esta condição é satisfeita por meio de proposições que concordam tanto quanto possivel com a expeciencia. Quando atribuimos a uma quantidade empírica o valor que, segundo as observações atuais, parece ser o melhor, obtemos proposições menos passiveis de alteração por observações futuras que aquelas proposições baseadas em qualquer outro valor da quantidade em apreço.

Dividimos o campo da experiencia em partes que são descritas pelas diferentes ciências. Assim obtemos proposições menos gerais, mas mais facilmente comprovaveis. Esta divisão não implica em que nos resignamos a uma separação permanente das ciências. Pode-se observar melhor esse fato na historia da matemática. O desejo de que cada proposição tenha uma demonstração imperativa surge quando se dispõe de uma grande e bem "peneirada" quantidade de material. Euclides sem dúvida dispunha de material dessa especie quando tentou organizar em sistema o conhecimento de geometria do seu tempo.

Condições semelhantes podem ser encontradas na historia do cálculo que começou com um período de descobertas surpreendentes. Mais de cem anos se passaram antes que o interesse dos investigadores se voltasse para a formulação exata das proposições e para as condições em que são válidas. Isso constituiu o problema da chamada matemática crítica. Os trabalhos clássicos desta escola não investigam os fundamentos da matemática em geral, mas limitam-se ao estudo das suposições e noções que constituem a base de uma teoria especial. Isso se faz, por exemplo, baseando a teoria de uma variavel real sobre a teoria dos números cardinais, ou baseando a teoria das funções na doutrina das séries infinitas.

Esses investigadores dividiram o campo da matemática em várias partes, cada uma das quais encontrou a sua representação em uma teoria diferente. As proposições fundamentais são claramente formuladas e a dedução dos teoremas satisfaz todas as exigencias razoaveis. A questão de saber se um grupo de axiomas poderia talvez ser suficiente para todos os sistemas não é encarada por esses pensadores. Deixam essa questão a cargo da investigação futura. Este é o problema central do ramo da lógica chamado logística, que primeiro foi estudado nos fins do século passado. Os logísticos resolvem o problema de basear a matemática em sua totalidade na noção de número e na doutrina das classes. Mostram que os principios da lógica são suficientes para deduzir qualquer proposição da álgebra, de maneira que todas as noções usadas na matemática pura podem ser definidas partindo de um número muito limitado de noções fundamentais. O mesmo processo de unificação pode ser observado em todas as ciências. Em algumas o êxito é notavel, em outras é pequeno; mas em caso algum se aproxima sequer do êxito obtido na matemática.

6) **Representação matemática das leis naturais** — A classe de proposições que podem ser usadas para descrever os fenômenos da natureza é infinita e idêntica à classe de todas as funções. A palavra função deve ser compreendida no seu sentido mais geral, no qual afirma a existencia de uma relação de qualquer especie. Esta noção é por demais abstrata para ser usada no trabalho real e é necessário restringi-la de fórma que se torne praticavel. Nenhum argumento pode ser apresentado contra a noção de uma dependencia geral, mas a restrição a uma fórma particular de dependencia implica suposições que é importante formular. Se todos os fenômenos da natureza podem ser representados desta maneira, segue-se que todos os fenômenos teem necessariamente todos os atributos que correspondem às qualidades comuns às funções desse carater especial. Os métodos empregados na física matemática implicam na suposição de que certos atributos são comuns a todos os fenômenos da natureza. Esta suposição é introduzida tacitamente e nenhuma razão é apresentada para justificá-la.

O seguinte exemplo é típico de muitos problemas da física. Suponhamos que X_1, X_2, ... X_n são atributos quantitativos de um objeto e que são representados pela fórmula:

$$F(X_1, X_2, \dots X_n) = 0$$

A fórmula que exprime a lei de Mariotte é desse tipo. É uma norma de coexistencia e permite calcular uma quantidade quando as outras são dadas. A existencia de tais fórmulas sugere duas questões: 1) Por que deverá um objeto ter certos atributos em consequencia de possuir outras qualidades dadas, e 2) Por que deverá a relação existente entre os atributos ser tal que nos capacite a calcular a quantidade. As questões são tanto mais urgentes, uma vez que a função F, que dá a lei natural do fenômeno implicado, é determinada por um pequeno número de observações. O conhecimento da função F permite-nos fazer um número infinito de afirmações, e supomos que um objeto deva possuir um número infinito de atributos porque a nossa observação tem mostrado que um certo número finito — e talvez bem pequeno — de atributos lhe pertence.

O êxito prático dessas fórmulas está fóra de discussão, e o contacto prolongado já nos familiarizou com elas. Assim, aceitamo-las sem apreensões. Ha um outro exemplo no qual essa familiaridade não existe e onde nos sentimos menos propensos a negligenciar as dificuldades do nosso raciocinio. Refiro-me ao problema que, ha muitos anos atrás, levou-me a esta ordem de ideias.

Façamos com que um sujeito compare dois estímulos R_1 e R_2, dois pesos, por exemplo, entre os quais não haja uma diferença muito grande; façamo-lo, depois, exprimir essa experiencia por meio de julgamentos, que indiquem se o segundo estímulo é maior, menor ou igual ao primeiro. Esses julgamentos são acontecimentos casuais, pois não sabemos que julgamento será proferido em um experimento determinado e os julgamentos se sucedem sem ordem de especie alguma. Repetindo esses experimentos um número suficiente de vezes, verificamos que estamos tratando com acontecimentos casuais de probabilidade constante, e os resultados são semelhantes aos obtidos quando se tiram bolas de uma urna que contem bolas pretas, brancas e vermelhas em proporções constantes.

Essas probabilidades são diferentes para pessoas diferentes e dependem evidentemente da constituição psicofísica do sujeito. Qualquer afirmação relativa a essas probabilidades sob condições dadas diz respeito a um atributo do sujeito. Podemos supor, razoavelmente, que essas probabilidades dependem das intensidades dos dois estímulos de comparação e constituem a base da noção das funções psicométricas, a qual exprime a relação entre as probabilidades desses julgamentos e as intensidades dos estímulos comparados. A fórma dessas funções é a mesma para todos os sujeitos, mas as constantes que conteem variam em sujeitos diferentes. Teoricamente, é suficiente conhecer a probabilidade de tres pares de estímulos a serem comparados, mas geralmente é conveniente tomar um número um pouco maior para eliminar os erros de observação.

A fórmula da função psicométrica é uma norma de coexistencia e nos capacita a fazer afirmações sobre um número infinito de atributos do sujeito. Facilmente compreendemos que os atributos de um sujeito devem manter entre si um certo tipo de relação, mas parece curioso que essa relação seja tal que todos esses atributos possam ser deduzidos do conhecimento de alguns apenas. Na psicologia estamos habituados a considerar o sujeito como uma unidade, e quando pensamos em termos das capacidades mentais primárias de Thurstone, podemos delinear o perfil da personalidade indicando a quantidade em que cada capacidade se acha presente em um sujeito. Esta concepção implica tambem a determinação da constituição mental do sujeito por meio de um número limitado de dados. Quando aplicamos a noção de unidade, quer na física, quer na psicologia, chegamos à conclusão de que os atributos não são distribuidos a esmo, mas que a sua conexão exibe regularidades passiveis de investigação. No estudo desses atributos, passiveis de determinação numérica, temos que empregar a matemática e isto nos leva inevitavelmente à questão: qual o passe de mágica que tornará possivel fazer um número infinito de afirmações com base em um pequeno número delas?

Ao estudar os fenômenos da natureza, limitamo-nos à classe das funções analíticas. A possibilidade de que a descrição correta do fenômeno exija o uso de funções mais complicadas, não é absolutamente tomada em consideração. A consequencia é que essas qualidades comuns a todas as funções analíticas devem ser encontradas em todas as nossas descrições de fenômenos naturais, e teem, portanto, o valor de leis naturais. Qualquer propriedade comum a todas as funções analíticas corresponde, como imagem, a algum atributo dos fenômenos objetivos e todos esses atributos devem ser encontrados em todos os fenômenos estudados pelos métodos matemáticos.

É hábito denominar "lei da causalidade" a totalidade das nossas noções sobre a conexão dos fenômenos naturais. O conteudo lógico desta noção é dado pelas propriedades comuns a todas as funções usadas na descrição dos acontecimentos naturais. Se alargarmos ou restringirmos a classe de funções usada para esta finalidade, mudaremos as nossas ideias sobre a causalidade.

Em relação a algumas das propriedades das funções analíticas, podemos facilmente definir os atributos correspondentes dos acontecimentos objetivos. Em relação a outras propriedades, a resposta é muito dificil. Alguns desses atributos concordam perfeitamente com as nossas ideias. O uso exclusivo de funções analíticas implica em uma limitação dos nossos pensamentos que não deve ser aceita sem discussão. Parece intoleravel que um limite definido deva ser fixado para as nossas pesquisas pelos proprios métodos que usamos nas investigações.

Procuremos formar provisoriamente o seguinte ponto de vista. É fato que as funções analíticas são as únicas que podemos manejar convenientemente. Surgem sempre complicações quando somos obrigados a manipular uma função à qual falta uma ou outra das propriedades das funções analíticas. Quando queremos resolver um problema não temos outro recurso senão apelar para as funções analíticas. O uso exclusivo dessas funções é um artifício que dispensariamos se já tivéssemos aprendido a dominar as funções mais gerais. A limitação é apenas provisoria; não é definitiva e será removida — inteira ou parcialmente — quando a nossa técnica matemática avançar suficientemente. Vamos deixar bem claro este ponto: Cada uma dessas mudanças implica em uma alteração dos nossos pontos de vista sobre a conexão dos fenômenos ou sobre o principio de causalidade, e a cada fase da técnica de manipulação das fórmulas matemáticas corresponde uma certa concepção de causalidade.

7) **Determinação por meio de um número finito de observações** — Somos obrigados a basear as descrições dos fenômenos naturais sobre um número finito de observações. As funções que exigem para sua determinação uma infinidade de dados de nada nos servem quanto pretendemos descrever fenômenos naturais, porque podemos dispôr apenas da experiencia finita. Pondo de parte certas excepções, podemos dizer que somente as funções analíticas podem ser determinadas por um grupo finito de dados. As funções mais gerais, que são discontínuas e não podem ser diferenciadas, exigem para sua determinação uma infinidade de dados. Podemos definir uma infinidade de dados no nosso pensamento, mas nunca poderemos ter a experiencia real de um grupo infinito de dados. Não podemos determinar pela observação a lei de um fenômeno quando ela é dada por uma função baseada em uma infinidade de dados. As fases de um processo desse gênero sucedem-se de acôrdo com uma regra definida, mas essa regra não pode ser encontrada por nenhuma experiencia finita. Pode-se afirmar coisa semelhante em relação à coexistencia dos atributos. Não pode haver dúvida quanto ao fato de que essa coexistencia obedece a certas regras, mas estas são de tal carater que escapam à averiguação por meio da experiencia finita. Aqueles dentre os srs. que forem versados em psicologia da personalidade prontamente concordarão que ao tratar de alguns dos problemas desse ramo da psicologia tem-se a estranha sensação de que jamais se poderá dispôr de dados em número suficiente para chegar a uma solução realmente satisfatória.

Vamos ilustrar esse fato com um exemplo, no qual é impossivel encontrar uma solução com base na experiencia limitada, embora não haja a menor dúvida quanto à existencia de uma lei. Consideremos a sequencia dos algarismos que determinam um número irracional, como por exemplo o número **e**, base dos logaritmos naturais. Não resta dúvida quanto à existencia de uma lei, pois o algarismo que aparece em cada casa decimal é determinado pela definição desse número. Não ha possibilidade, entretanto, de deduzir essa lei da observação de qualquer parte finita da série, por mais extensa que seja essa parte. Não existe uma regra em virtude da qual possamos concluir, do fato de que um certo algarismo aparece na késima casa decimal, qual será o número encontrado na (k — n)ésima casa decimal, quando **k** e **n** são números arbitrários. A lei só pode ser observada na totalidade dos números, mas não pode ser deduzida de qualquer parte finita dela.

Quando um processo é dado por uma sucessão de fases, cuja lei não pode ser encontrada por meio de um número finito de observações, os nossos métodos de investigação estão destinados ao fracasso. Podemos observar tantas das suas fases quantas quizermos, mas nunca poderemos predizer o seu curso futuro, nem fazer uma afirmação quanto aos seus antecedentes. O psicólogo prontamente se lembrará de muitos fenômenos que parecem apresentar esse aspecto. Pensem nas ações humanas empreendidas com a finalidade de alcançar um determinado objetivo. Para quem não tem conhecimento do objetivo colimado, as ações tomadas separadamente parecerão feitas a esmo, mas o seu curso é perfeitamente lógico e inteligivel quando se sabe quais são as intenções da pessoa.

O caso é diferente quando a função em apreço pode ser determinada por um número finito de dados. De posse dos dados necessários, elaboramos uma fórmula e então o curso dos acontecimentos estará determinado não somente dentro do intervalo sobre o qual incidiram as nossas observações, mas tambem alem dos limites desse intervalo, no futuro indefinido e no passado ilimitado. Existe um determinismo absoluto em relação a todos os fenômenos descritos pelas funções analíticas. A doutrina do determinismo, com as suas implicações relativas ao livre arbítrio, é uma consequencia inevitavel do ponto de vista de que todos os fenômenos da natureza podem ser descritos por funções analíticas e a ciência física está presa a esse ponto de vista em razão do método matemático que emprega. Devemos insistir, todavia, que esse ponto de vista não encontra apoio em razões lógicas de espécie nenhuma e que nós nos limitamos ao uso dos métodos da física matemática porque a técnica matemática de que dispomos não nos permite fazer de outra fórma.

Gostaria de falar, neste ponto, de um grupo de ideias conhecidas pelo nome de "Ideal mecânico de Laplace". Este começa por mostrar que alguns acontecimentos são causalmente necessários e argumenta que o curso do mundo consiste exclusivamente de fenômenos causalmente necessários, com exclusão de quaisquer outros. Todo e qualquer acontecimento poderia ser calculado se todas as leis, bem como o estado do mundo em um dado momento, fossem conhecidos. Essas informações levariam a uma "fórmula do mundo", pela qual todos os acontecimentos poderiam ser calculados mediante a introdução das determinações espaciais e temporais corretas.

Laplace assume aí a posição de um filósofo racionalista e não de um cientista. A suposição de que todas as leis da natureza são conhecidas, relaciona-se com uma das suas teorias favoritas, isto é, de que existe somente um pequeno número de leis naturais. Não o contradiremos. A suposição de que o estado do mundo em um certo momento do tempo possa ser dado, exige uma afirmação relativa a todos os elementos de uma variedade contínua e tridimensional. Tal afirmação necessariamente deve ser dada sob a fórma de uma função matemática, pois essa é a única maneira de descrever uma variedade contínua. O que implica em que o estado do mundo, a qualquer momento, deve apresentar uma regularidade passivel de ser determinada por um número finito de observações. Isto está em evidente contradição com a nossa experiencia e não se pode dizer que a ideia de um ideal mecânico se torne mais atraente ao percebermos essa consequencia.

A ideia básica desta concepção pertence à filosofia racionalista. Alguns filósofos nutriram a esperança de satisfazer-se com uma quantidade menor ainda de experiencia. Descartes deduziu todo o seu sistema das regras da lógica e da sua propria existencia, único fato empírico que se encontra na base da sua filosofia. Schopenhauer foi um pouco, mas não muito adiante, afirmando que o mundo todo poderia ser explicado se um fato da experiencia fosse completamente compreendido. Isso depende do que se entender pela palavra "completamente", pois poderiamos interpreta-la de maneira a incluir todas as leis e dados exigidos por Laplace.

8) O caso das funções analíticas — Consideremos o papel desempenhado pelas funções analíticas na mecânica que estuda o movimento dos corpos materiais. Essas funções possuem algumas propriedades que correspondem muito de perto aos atributos que estamos habituados a considerar como essenciais para a descrição de movimentos dessa espécie.

Em primeiro lugar, temos a continuidade. Dificilmente consentiriamos em abandonar esse atributo ao descrever os movimentos dos corpos materiais. As consequencias que adviriam do ato de considerar tais movimentos como discontínuos não concordam com os nossos pontos de vista relativos ao curso da natureza. Com efeito, uma discontinuidade das coordenadas espaciais significa que o corpo subitamente desaparece em um lugar e reaparece em algum outro ponto. A suposição de uma discontinuidade no tempo leva a resultados igualmente inaceitaveis. Tal discontinuidade significa que o movimento do corpo muda subitamente e sem influencia exterior. Não acreditamos que a natureza execute tais truques de prestidigitação, e isto é um forte argumento a favor da suposição de que os movimentos dos corpos naturais são contínuos. Da mesma maneira, não nos sentiremos propensos a aceitar a discontinuidade na descrição dos fenômenos biológicos. Tomemos como exemplo a descrição do crescimento de um organismo. Parece natural supor que um organismo em crescimento passe através de todas as fases existentes entre dois estagios determinados do seu desenvolvimento.

Nós nos recusaremos a empregar na descrição de movimentos materiais funções que possuem máximos e mínimos em cada intervalo, pois isto implicaria que o corpo muda de direção uma infinidade de vezes em cada intervalo. O que parece ser razão suficiente para pôr de lado essas funções.

A suposição de que cada função usada na mecânica deveria possuir uma derivada é mais dificil de justificar. Abandonar a suposição de que a primeira e a segunda derivada existem significa que o corpo se move sem possuir uma velocidade ou aceleração que se lhe possa atribuir. Diante deste fato, pode-se assumir o ponto de vista agnóstico e argumentar que essas velocidades e acelerações existem e são inteiramente determinadas pelas condições respectivas, mas não podem ser determinadas pelos nossos métodos de investigação. Os nossos métodos não são adequados à determinação dessas quantidades. Considerações semelhantes podem ser feitas em relação à não-existencia das derivadas mais altas.

É dificil dizer se a propriedade da função que consiste em admitir a expansão em uma série, tem ou não certa significação física. Alguns investigadores insistem em que cada termo da série corresponde a um certo grupo de condições e que o fenômeno é produzido pela adição de todos esses fatores. Já se tentou aplicar esse ponto de vista à análise de experimentos reais, mas o resultado mostrou-se longe de ser satisfatório.

É ainda mais difícil responder à questão: por que não são admissiveis as transformações que alteram o carater analítico de uma função. Essas transformações são de caracteres variados e é pouco provavel que admitam uma única interpretação. Talvez não exista outro argumento senão que as funções não analíticas não devem ser empregadas na descrição dos fenômenos físicos. Aqui vemos, entretanto, como é arbitrária essa limitação, porque existem transformações que, quando se trata de valores racionais de um certo parâmetro, deixam inalterado o carater analítico da função, mas destroem-no quando se trata de valores irracionais do parâmetro.

Os métodos da física teórica levam necessariamente às funções analíticas, ou a funções que possuem a maioria das propriedades daquelas. Começamos por considerações relativas aos acontecimentos que se verificam em partes infintesimais do tempo e do espaço, e chegamos às equações diferenciais cuja solução dá as funções que, como leis da natureza, teem que resistir à prova da experiencia. Essa origem torna evidente que as funções encontradas por essa maneira devem ser contínuas e possuir uma derivada. Somente em pontos, cuja classe é numeravel, podem faltar essas propriedades. Este raciocinio baseia-se no ponto de vista de que os fenômenos da natureza são melhor compreendidos por meio das equações diferenciais que os definem, do que por qualquer número de observações dos valores das funções implicadas. O ponto de vista de que os fenômenos da natureza são melhor compreendidos por meio de considerações relativas aos acontecimentos verificados em partes infinitesimais do tempo e do espaço chama-se: "revolução de Riemann".

Os nossos pontos de vista sobre o curso da natureza encontraram uma expressão perfeita nos métodos da física. O êxito desses métodos é indiscutivel e são aprovados praticamente por todos os pensadores. Isto não nos deve impedir de dizer que até hoje não foram claramente formuladas as suposições que estes métodos implicam. O conteudo lógico dessas suposições é dado pela totalidade das propriedades comuns a todas as funções usadas para descrever os acontecimentos físicos. A interpretação física destas propriedades dá as leis gerais dos fenômenos físicos. Este é o verdadeiro conteudo do chamado principio de causalidade. A significação lógica dessas proposições, em campos inaccessiveis aos métodos matemáticos, teria que ser investigada de maneira semelhante, isto é, analisando os métodos empregados no estudo desses fenômenos.

A enumeração e a interpretação das propriedades das funções usadas na ciência darão um complicado sistema de proposições e podemos considerar como certo que não será possivel deduzi-las todas de um único axioma. É uma empreza vã partir de uma proposição como "Não ha efeito sem causa" ou — mais eruditamente — "Nada existe sem uma razão para que exista, de preferencia a não existir", ou qualquer outra das inúmeras definições deste principio, afim de deduzir as leis relativas ao curso da natureza. A historia mostra que todos os esforços desse gênero estão fadados ao fracasso. A conexão existente entre fenômenos da natureza e as ideias que formamos a respeito deles são por demais complicadas para serem explicadas de maneira tão primitiva. Não podemos deixar de levantar a questão de saber quais as mudanças que se verificariam no nosso conhecimento da natureza se abandonássemos, na descrição dos fenômenos naturais, uma ou outra das propriedades das funções analíticas. Acaso nos impediria de obter qualquer conhecimento a respeito dos acontecimentos objetivos? Isto é um problema puramente lógico, mas é conveniente não ser muito precipitado na publicação dos resultados. Quando recordamos a maneira desarrazoada pela qual foram recebidas as primeiras publicações relativas à geometria não-euclideana, dificilmente nos sentimos tentados a fazer experiencia semelhante em um campo no qual todos se julgam com direito de ter opinião formada. Mostraremos que abandonar uma das propriedades das funções analíticas não destroe imediatamente todo o conhecimento sobre a regularidade dos acontecimentos.

Sem entrar nas minúcias do teorema, podemos dizer que qualquer função contínua pode ser integrada. Digamos que $y = f(x)$ e suponhamos que a função inversa em que y é a variavel independente e x a dependente, possue uma integral. Nestas condições, podemos fazer uma afirmação relativa às probabilidades de y. Tal afirmação requer simplesmente a continuidade da função inversa e todas as outras propriedades das funções analíticas não teem importancia alguma para este problema. É verdade que uma afirmação sobre probabilidade não possue para nós o mesmo valor que o conhecimento da função que indica a lei do fenômeno, mas capacita-nos a fazer certas afirmações sobre os acontecimentos. As suposições implicadas na noção de probabilidade são muito gerais e esta é a razão pela qual o cálculo de probabilidade é usado praticamente em todos os campos da ciência.

CAPITULO IV

A TEORIA DA PROBABILIDADE

1) A probabilidade como um estado mental — A palavra "provavel", no seu sentido fundamental, referese a uma experiencia mental que é subjetiva e que não pode ser diretamente compartilhada por ninguem mais. Podemos descreve-la dizendo que é um estado de incerteza maior ou menor, mas isto não é mais que uma substituição de palavras e não esclarece quem jamais teve essa experiencia. A incerteza que experimentamos em uma dada situação é tão subjetiva quanto a sensação da côr azul. Podemos fazer com que alguem entenda o sentido da palavra "probabilidade" indicando as situações em que temos essa experiencia. A pessoa poderá colocar-se em uma dessas situações e terá, por sua vez, a experiencia, sem, entretanto, ser capaz de comunica-la a ninguem mais. É nesse sentido que a probabilidade é subjetiva.

As situações nas quais temos a experiencia da probabilidade teem em comum um aspecto: colocam-nos frente a frente com o possivel. Esta palavra deve ser tomada no seu sentido estritamente lógico e definida previamente: A proposição **a** é possivel com referencia a um dado grupo **h** de informações, quando nem **a** nem não-**a** podem ser deduzidos de **h** por processo puramente lógico. As palavras certo, impossivel, possivel, bem como as palavras incerto, impossivel, improvavel exprimem a relação em que certas proposições se encontram para com um dado grupo de informações.

O ato de julgar a relação existente entre **a** e **h** está, em todos os casos individuais, sujeito às leis psicológicas, tal como qualquer outro processo mental. E. B. Titchener e E. G. Boring sugeriram métodos para o estudo desses processos. Mas no sentido que importa para a lógica, a probabilidade não é subjetiva ou sujeita ao capricho humano. Um acontecimento não é provavel porque nós assim pensamos. Quando os fatos são dados, o que é provavel ou improvavel nessas circunstancias é fixado objetivamente e independe da nossa opinião. A teoria da probabilidade está interessada no grau de convicção que é racional nutrir em certas condições, mas não meramente com a convicção real de indivíduos particulares. Esta distinção é idêntica à que se faz entre as regras da lógica abstrata e os processos mentais implicados no pensamento, que nem sempre seguem o modelo lógico.

A nossa incerteza em relação à verdade de uma proposição ou a nossa confiança na sua veracidade tem uma graduação. Se a informação **h** é dada e justifica uma crença racional de grau P, nas proposições **a**, dizemos que existe uma relação de probabilidade de grau P entre **a** e **h** e escrevemos:

$$a/h = P$$

Esse símbolo, que devemos a Keynes, não é uma fórmula algébrica que implica na igualdade de duas quantidades. Os estados de confiança são de diferentes graus e podem ser dispostos em uma ordem tal que cada estado indique um grau mais alto que o precedente.

2) **Probabilidades numéricas e não numéricas** — As probabilidades em geral são definidas como estados mentais, e como tal, não são mensuraveis. Podemos arruma-las pela ordem de grau, mas isto não implica que sejam quantidades ou sejam mensuraveis. Os psicólogos estão bastante familiarizados com esta questão, pois a lei de Weber, que depende da medida das sensações, foi o primeiro grande problema da psicologia experimental. Os srs. poderão encontrar uma excelente apresentação da historia desse problema na Historia da Psicologia Experimental de Boring e não é minha intenção entrar nos detalhes dessa controversia. Presentemente o nosso interesse está centralizado nos pontos de vista relativos à medida da probabilidade.

Vários autores proeminentes acreditam que a comparação numérica entre quaisquer probabilidades dadas é sempre possivel. W. R. Donkin não duvida de que qualquer estado definido de crença relativa à verdade de uma proposição pode ser representado por um número, embora seja dificil, em muitos casos, encontra-lo. De Morgan manteve o mesmo ponto de vista e argumentava que onde quer que existam diferenças de grau, a comparação numérica é possivel. As probabilidades podem ser ordenadas segundo a sua magnitude e daí conclue que são mensuraveis.

Este raciocinio atraiu os matemáticos, interessados primordial e quasi exclusivamente, nas probabilidades numéricas. A definição clássica de que a probabilidade é a proporção entre o número de casos favoraveis e o número total de casos, implica que qualquer probabilidade pode ser expressa numericamente — que é, de fato, um número. A propria definição assegura o carater numérico de todas as probabilidades.

Um argumento a favor deste ponto de vista parece poder ser encontrado no fato de que se pode fazer um seguro contra praticamente todas as especies de riscos. As firmas seguradoras estão prontas para fixar um premio para qualquer risco concebivel e prontas para apoiar com dinheiro a sua opinião. Tomemos como exemplo a eleição para presidente dos Estados Unidos em 1912. Quem acreditasse na vitoria de Woodrow Wilson pagaria 60 dólares ao segurador e após a eleição ganharia 100 dólares se tivesse adivinhado corretamente. Os corretores que entendem do seu negocio ganham muito dinheiro por essa fórma, mas isso não prova o carater numérico das probabilidades implicadas. O truque consiste em aceitar apostas em todos os candidatos e fixar o premio de maneira a ganhar sempre, seja qual fôr o resultado.

Não existe um método pelo qual um valor numérico possa ser atribuido a qualquer probabilidade. A avaliação numérica das probabilidades é impossivel em muitos casos. Não que o método de cálculo seja por demais trabalhoso ou dificil: o caso é que nenhum método foi proposto. Não temos tambem razão para crer na existencia de uma unidade comum por meio da qual a magnitude de todas as probabilidades possa ser expressa. Um grau de probabilidade não é composto de um material homogêneo e não é divisivel em partes idênticas entre si.

O raciocinio que apresentamos nos dois últimos parágrafos deve-se a Keynes. Exatamente o mesmo argumento se aplica ao raciocinio pelo qual Fechner chega à sua lei, formulando e resolvendo uma equação diferencial. Uma sensação, bem como uma probabilidade, é um estado mental e não é a soma de partes iguais. O argumento de De Morgan foi apresentado e refutado na psicofísica. É fato que certos estados mentais, como por exemplo sensações e probabilidades, podem ser dispostos em uma ordem que poderia ser adequadamente chamada ordem de magnitude ou intensidade, mas isso não prova que sejam quantidades ou que as suas diferenças possam ser medidas numericamente.

Certeza, impossibilidade e probabilidade constituem uma série ordenada em que a probabilidade se situa entre a certeza e a impossibilidade. Da mesma fórma, pode existir uma segunda probabilidade que se situa entre a primeira e a certeza. Neste caso dizemos que a segunda probabilidade é maior que a primeira. Tal comparação nem sempre é possivel, pois exige que as duas probabilidades e a certeza pertençam à mesma série ordenada. Existem várias séries ordenadas de probabilidades, ligando a certeza e a impossibilidade, e as probabilidades que pertencem a séries diferentes não são comparaveis.

3) As regras da inferencia necessária e da inferencia provavel — Keynes propôs-se demonstrar que partindo da concepção de probabilidade acima esboçada, podemos, por meio de métodos rigorosos, deduzir de um pequeno número de definições simples e precisas os teoremas geralmente aceitos sobre a probabilidade. A sua teoria se refere a todas as espécies de probabilidade, tanto numéricas como não numéricas. Apresenta as suas deduções na fórma de lógica simbólica e para o leitor não familiarizado com esse estilo, as suas páginas podem parecer rebarbativas. Essa impressão é errônea. O seu raciocinio é muito claro e vale a pena dar-se ao trabalho de estuda-lo. Aqueles dos srs. que por falta de tempo ou por outras razões, não possam faze-lo, deverão aceitar como verdadeiro que as deduções de Keynes não conteem uma falha.

Keynes postula 16 axiomas para deduzir a teoria geral da probabilidade e tres outros para especificar o grupo das probabilidades numéricas. Citarei aqui os sete primeiros axiomas afim de ilustrar o ponto importante de que as regras da inferencia provavel incluem as regras da inferencia necessária. Por outras palavras, que a teoria da probabilidade inclue as regras da lógica. Todos os axiomas são definições.

I. Se existe uma relação de probabilidade P entre a proposição **a** e a premissa **h**:

$$a/h = P$$

II. Se P é a relação de certeza:

$$P = 1$$

III. Se P é a relação de impossibilidade:

$$P = 0$$

IV. Se P é uma relação de probabilidade, mas não a relação de certeza:

$$P < 1$$

V. Se P é uma relação de probabilidade, mas não a relação de impossibilidade:

$$P > 0$$

VI. Se $a/h = 0$, a conjunção ah é incoerente.

VII. A classe de proposições **a**, tal que $a/h = 1$, é o grupo especificado por **h**, ou (para abreviar) o grupo **h**.

Ao ler os axiomas II e III é preciso lembrar que os símbolos 0 e 1 são designações abreviadas dos estados mentais chamados impossibilidade e certeza. Não teem significação quantitativa e são indicações tão arbitrárias quanto, dor exemplo, a palavra "vermelho" para a sensação correspondente. Incidentemente posso observar que estes símbolos foram introduzidos primeiramente por Leibniz.

Keynes deduz dos seus 16 axiomas fundamentas 23 teoremas de inferencia necessária e 26 de inferencia provavel — ao todo 49 teoremas fundamentais. O raciocinio é apresentado sob a fórma prescrita por Bertrand Russell e em cada estágio são mencionados os axiomas ou teoremas sobre os quais se baseia. É meramente uma expressão de preferencia pessoal observarmos que as condições sob as quais a adição e a multiplicação são comutativas e associativas poderiam ter sido mais extensamente tratadas. Não resta dúvida de que Keynes mostrou que existe um sistema de proposições abstratas que compreende a lógica da inferencia provavel e necessária. A definição do "grupo h" dada no axioma VII é idêntica ao que chamamos sistema de pensamento, nas aulas anteriores.

Estando estabelecida a teoria geral da probabilidade, o passo seguinte consiste em demonstrar sob que condições se podem atribuir valores numéricos às probabilidades. Quais os outros axiomas necessários para deduzir o cálculo de probabilidade da teoria geral? Esta questão é respondida pela introdução dos axiomas XVII, XVIII e XIX. As duas últimas proposições são de carater formal e referem-se à manipulação dos símbolos, de maneira que não precisamos discuti-las. O axioma XVII introduz uma nova noção, o chamado principio da indiferença, cuja discussão empreenderemos mais tarde, após ter demonstrado a dedução da noção de probabilidade matemática da teoria de classes.

4) **A experiencia da igualdade** — Existem objetos entre os quais não percebemos diferenças e que chamamos iguais. É fato também que existem objetos entre os quais não percebemos diferença em relação a um certo atributo e que chamamos iguais com referencia a esse atributo. A experiencia da igualdade é um fato de consciencia tão imediato quanto a percepção de uma diferença.

A noção de igualdade tal como a usamos na ciencia e na matemática é abstrata, mas tem como base o fato fisiológico de que o organismo reage da mesma fórma a estímulos diferentes, se a diferença é pequena. Um cão condicionado por Pavlov a um som de 1.000 vibrações, reagia da mesma fórma a sons de altura levemente diferente. A secreção de saliva por esse cão é equivalente a um julgamento de igualdade proferido por um observador em um experimento psicofísico de comparação de dois estímulos. O valor biológico da sensação como auxiliar para a preservação do indivíduo seria muito pequeno se não existisse a percepção da igualdade.

Não tomaremos em consideração o argumento, apresentado por Leibniz, de que não existem dois objetos realmente iguais. Consideramos como um fato que percebemos o atributo A em objetos diferentes. Em relação a este atributo A esses objetos são iguais.

5) **Noções e classes.** — A definição de uma noção dá o grupo de atributos comuns a vários objetos. Um grupo de objetos que possuem todos eles o atributo A é chamado uma classe, especie ou conjunto e os objetos que o constituem são chamados elementos da classe. Acontece que uma classe não contem elemento absolutamente algum, e nesse caso é chamada vazia.

São de particular importancia as classes em que podemos afirmar, em relação a qualquer objeto, se é ou não um elemento da classe. Essas classes são chamadas bem definidas. Quando falamos de uma classe sem mais ressalvas, sempre nos estamos referindo a classes bem definidas.

O grupo de atributos comuns a todos os elementos de uma classe é chamado noção e a proposição que indica a palavra pela qual designamos esse grupo de atributos chama-se definição desse termo. Toda definição é a explicação de uma palavra.

Os atributos necessários e suficientes para decidir se um objeto pertence ou não à classe são chamados atributos constitutivos ou primários da noção. Designemos por A os atributos primários de um objeto que pertence à classe M. Suponhamos que podemos deduzir de A, por dedução lógica, que o grupo de atributos B deve estar presente.

Se uma classe contém só um elemento, algumas vezes falamos de uma noção individual. Os nomes das pessoas são um exemplo obvio. Não é necessário enumerar todos os atributos do objeto, o que é, de qualquer fórma, impossivel, mas é suficiente formular os atributos por meio dos quais reconhecemos que este objeto, e não outro, pertence à classe.

Um objeto pertence a uma classe somente quando possue os atributos enumerados na definição e, portanto, todos os elementos da classe necessáriamente possuem esses atributos. Todo objeto posue uma infinidade de atributos, que determinam a sua individualidade, mas somente alguns deles são escolhidos quando o consideramos como elemento de uma classe determinada. Formar classes é um processo intelectual e o processo de selecionar certos atributos e negligenciar todos os outros chama-se "abstração". O processo de abstração pode ser aplicado novamente às noções resultantes, e dessa fórma chegamos a noções de generalidade crescente.

A abstração é um processo intelectual que não altera os objetos. Pode ser importante para mim e para as minhas ações futuras dividir as plantas em fanerógamos e criptógamos, mas isso nada altera nas plantas.

Seja M definido pelo grupo de atributos A. Definimos pelo atributo B a parte de T que contém os elementos nos quais B tambem está presente e que são designados por AB. Tres casos são possiveis; T pode compreender todos os elementos de M; T pode ser vazio e T pode compreender somente alguns dos elementos de M. Apenas no último caso podemos dizer que T é uma parte real de M. Os atributos A e B são independentes neste caso. No primeiro caso os atributos A e B são necessariamente ligados e no segundo são mutuamente exclusivos. Nestes dois casos existe a relação de dependencia entre A e B, ou entre A e não-B. No terceiro caso existe a relação de independencia lógica.

Os elementos de M são determinados em relação a A, pois nenhum objeto pode ser elemento da classe sem possuir estes atributos. Possuem necessariamente o atributo A. Em relação a B os elementos de M não são determinados, pois não é possivel concluir de A quanto à presença ou ausencia de B.

Um representante empírico da noção A é determinado em relação a estes atributos, mas indeterminado em relação a todos os seus outros atributos, dos quais existe uma infinidade. Em um elemento de M a presença dos atributos A é necessária, mas esta necessidade existe somente para o nosso pensamento. Empiricamente os objetos dados são tais como são e a presença de todos os seus atributos é um fato de experiencia que tem de ser aceito como tal. Dizemos frequentemente que tais e tais atributos de um objeto poderiam ser explicados se possuissemos informações mais completas. Queremos dizer com isso que esse atributo pode se tornar objeto de um processo de abstração, que, se obtiver êxito, nos permitirá tirar uma conclusão quanto à necessidade da presença ou ausencia desse atributo. Isto é, uma vez mais, uma necessidade puramente lógica.

Sejam M e M' duas classes quaisquer. Dizemos que M' corresponde a M quando a cada elemento de M corresponde um, e exclusivamente um, elemento de M'. Esta relação é mútua, quando a cada elemento de M' corresponde um, e exclusivamente um, elemento de M.

Dizemos que duas classes são de igual força ("power") quando existe esta relação mútua de um para um. A força de M é designada por $\overline{\overline{M}}$. A força de qualquer classe finita é dada pelo número dos seus elementos.

6) **Probabilidade matemática.** — Consideremos a classe M definida pelos atributos A, e a sua sub-classe T,

definida pela coexistencia dos atributos A e H. Supomos que ambas as classes são finitas. Chamamos a fração:

$$p = \frac{\bar{T}}{\bar{M}}$$

a probabilidade de que um elemento de M pertença a T. As forças das classes finitas T e M são números naturais. A probabilidade matemática é a proporção entre dois números, e, como tal, é um número. O seu valor varía entre zero e a unidade. Lembrando as definições dessas classes, podemos dizer tambem que p é a probabilidade de ser encontrado o atributo B quando o atributo A estivér presente. Os valores de tal probabilidade se situam entre 0 e 1, incluindo esses limites. Uma probabilidade matemática exige que seja dada a classe de referencia M. Esta referencia pode ser omitida somente nos casos em que não possa haver dúvida quanto à classe de referencia. Assim acontece quando acabamos de falar de M ou quando o atributo só pode ser encontrado nos elementos de M, como se verá nos exemplos que se seguem.

O atributo "ser um número primo" evidentemente só pode pertencer a números naturais, e quando falamos da probabilidade de um número primo estamo-nos referindo à probabilidade de que um número natural seja primo.

Da mesma maneira, não tem sentido falar da probabilidade da colisão de duas moléculas a menos que façamos referencia a um agregado de moléculas tal como aqueles aos quais se refere a teoria cinética dos gases.

Quando o atributo B pode ser encontrado não só nos elementos de M, mas também nos das classes M_1, M_2, ..., é preciso declarar qual a classe de que estamos falando, e a qual se supõe que se aplique a probabilidade.

A probabilidade p se refere à presença do atributo em um objeto do qual sabemos apenas que é um elemento de M. Escolher um objeto só com referencia a determinados atributos chama-se: escolha ao acaso. É o representante empírico do acaso lógico. O cálculo de probabilidade é o sistema de proposições deduzidas por meio de processos lógicos da noção de probabilidade matemática. A verdade lógica dessas proposições consiste no fato de concordarem com os axiomas de que são deduzidas. A verdade lógica dessas proposições não é afetada pelo fato de encontrarmos ou não na experiencia objetos que sejam corretamente descritos por elas. O problema gira sempre em torno da questão de saber se o processo pelo qual os objetos são selecionados é ou não a realização de uma escolha ao acaso. A observação direta deste processo é muito dificil e na maioria dos casos temos que nos satisfazer com a afirmação de que os resultados observados concordam em grau elevado com a suposição de que a seleção constitui realmente uma escolha ao acaso.

7) **A probabilidade não matemática.** — Quando queremos atribuir um valor numérico a uma probabilidade, as informações de que dispomos nos devem habilitar a determinar a proporção das forças respectivas das classes T e M. Quando não dispomos de tais informações, a probabilidade p não pode ser determinada. Quando as nossas informações são errôneas ou quando cometemos um erro no cômputo desta proporção, a nossa determinação de p é errada.

Nenhuma probabilidade matemática pode ser computada quando os objetos em questão não se prestam a um processo da abstração. O seguinte exemplo servirá para esclarecer esse ponto. Os egiptólogos encontraram um papiro cheio de exercícios aritméticos, conhecido pelo nome de livro de Ahmes. Tem sido muito debatida a questão de saber se esse livro apresenta o conhecimento aritmético dos egípcios na época, ou se é apenas um caderno de exercícios de um estudante muito desleixado no tomar suas notas. Tem algum sentido formular a probabilidade numérica de que um desses pontos de vista seja correto e o outro errado?

Os fatos de que dispomos são inconcludentes e não podemos provar nenhum dos dois pontos de vista, embora nos inclinemos a favorecer um deles. Um valor numérico não pode ser atribuido a esta probabilidade porque estamos tratando de um fato individual que não foi submetido a um proceso de abstração. Falta-lhe a classe de referencia M e assim não ha base para a determinação de um probabilidade numérica.

Este exemplo é típico de muitos problemas similares. A nossa decisão deve basear-se em um conhecimento íntimo do livro e precisamos formar um ponto de vista quanto à origem de certos erros: serão eles devidos a uma negligencia no copiar ou será concebível que os melhores cérebros dessa época cometessem o que nos parecem equívocos evidentes? A decisão é muito dificil, uma vez que temos que julgar os processos de raciocínio de um povo cuja atividade mental era consideravel, mas cujos processos de pensamento eram diferentes dos nossos.

O termo "probabilidade psicológica" é usado para designar os pontos de vista sobre a conexão dos acontecimentos psíquicos. Esta palavra é frequentemente usada nas discussões literárias, nas quais se diz que um personagem foi representado com fidelidade, enquanto que as reações de um outro são considerados improvaveis. Essas palavras se referem ao mal definido grupo das ideias com as quais interpretamos os motivos e ações dos outros. Isso depende muito da capacidade artística do autor e nesse sentido compreendemos a frase de Somerset Maugham de que a probabilidade psicológica de um personagem é aquilo com que o público se satisfaz. O sentido dessas palavras não é preciso, mas a discussão literária perderia muito do seu interesse se a probabilidade psicológica deixasse de ser assunto de controvérsia.

A probabilidade psicológica entra em jogo ao julgar as ações humanas, quando formamos uma opinião quanto aos motivos de um indivíduo. E' o inesgotavel problema de aplicar a lei às atividades humanas. Muitos juristas acreditam que a probabilidade psicológica é inteiramente diferente da probabilidade matemática e não resta dúvida de que este ponto de vista é correto. Existe uma decisão do Supremo Tribunal dos Estados Unidos no sentido de que nenhuma probabilidade matemática, por mais alta que seja, deve ser usada para formar julgamento. A probabilidade de que se fala constantemente nos procesos judiciários americanos não é idêntica à que se faz referencia no cálculo de probabilidade. Esta é excluida das provas apresentadas em um processo, porque o julgamento deve ser baseado em fatos irrefutaveis ou em fatos cujas lacunas sejam preenchidas por argumentos baseados na probabilidade psicológica.

O termo "probabilidade filosófica" é usado afim de designar a probabilidade do raciocínio inconcludente que não se refere a acontecimentos psíquicos. Qualquer teoría empírica baseada na indução pode servir de exemplo, como os pontos de vista de Darwin quanto à origem das espécies. Embora a prova não seja concludente, existem indícios que confirmam essa teoria e lhe concedem certo grau de probabilidade. Um valor numérico não pode ser atribuido a esta probabilidade pela mesma razão que no caso do livro de Ahmes: a teoria não pode ser objeto de um processo de abstração e não existe nenhuma classe M à qual se possa fazer referencia. Parece que Cournot foi o primeiro a empregar este termo para argumentos inconcludentes, quando a probabilidade não é numérica. No século XVIII e no início do XIX, o termo "filosófico" era largamente usado e encontramo-lo nos lugares mais inesperados. Um homem chamado Coeckelberg-Duetzele escreveu em 1845 um livro sobre o jogo do whist, antepassado do bridge dos nossos dias, no qual fala da diferença entre a probabilidade matemática e filosófica.

8) **Algumas observações históricas.** — A noção de acaso lógico é encontrada em Aristóteles, mas a noção da força de uma classe foi descoberta nos fins do sec. XIX. Antes dessa época, os pensadores operavam com a extensão das noções, que corresponde mais ou menos à totalidade dos membros da classe definida pela noção. Não sendo capazes de dar uma definição abstrata desse termo, apelaram para uma representação gráfica. Euler teve a ideia de representa-la por círculos e este método é muito conveniente para representar a relação entre duas ou mais noções. Tres casos são importantes para a probabilidade:

1) As classes A e B são idênticas e representadas pelo mesmo círculo. A probabilidade de B tem o valor 1. É o caso da certeza.

2) Os círculos A e B são totalmente separados. A probabilidade de B é zero. É o caso da impossibilidade.

3) Os dois círculos fazem intersecção. A área comum a ambos representa o grupo de objetos que possuem ambos os atributos A e B. A probabilidade de B tem um valor definido.

Usar a concepção do acaso lógico sem a definição precisa da força de uma classe não pode deixar de levar a definições imprecisas. J. J. Fourier, A. A. Cournot, J. v. Kries e A. Lange tentaram faze-lo e não conseguiram. É curioso notar que todas as definições dadas por esses eminentes autores mostram a mesma nebulosidade ou falta de precisão.

Fourier escreveu no ano de 1823: "Com efeito, o autor verificou que o número que mede a extensão de uma questão qualquer é sempre expresso por uma integral múltipla, cujos limites são dados." É evidente que o termo "extensão de uma questão" não tem sentido preciso.

Um termo que possue exatamente a mesma falta de precisão é encontrado na definição de probabilidade de Cournot: "Podemos, então, definir assim a probabilidade matemática: é a proporção existente entre as possibilidades favoraveis de um acontecimento e a extensão total das possibilidades". Cournot percebeu que as palavras "a extensão total das posibilidades" indicavam uma noção nova e suspeitou que se teria de tratar aí de uma generalização do conceito de espaço: "...mas este termo extensão não será empregado em geral senão por assimilação".

Kries critica a definição de Cournot e temos que concordar que a sua crítica é justificada. É curioso, entretanto, que ele não perceba a mesma falta de precisão na sua noção de "Spielraum" ou margem. O sentido desse termo não é claro no caso de mais de tres variáveis, e no caso das classes finitas tem apenas o valor de uma expressão metafórica. Kries publicou a primeira edição do seu: "Prinzipien der Wahrescheinlichkeitsrechnung" no ano de 1886 e nessa época a teoria das classes estava nos seus primeiros estagios de desenvolvimento. Seria dificil censura-lo por não ter visto que as especulações dos lógicos da sua época tinham uma importante repercussão sobre o problema. É surpreendente, todavia, que não tivesse feito um esforço para melhorar a sua definição na edição subsequente do seu livro.

F. A. Lange define a probabilidade como a proporção entre as extensões de duas noções. Se colocarmos a palavra "força" no lugar de "extensão", esta definição será correta. Lange escreveu mais ou menos em meados do século passado e é muito facil criticar essa definição dizendo que usa a noção de espaço de maneira inadmissivel. Esta crítica é correta somente quando temos à nossa disposição os diagramas de Euler, mas a definição é inteiramente abstrata e não tem relação com a percepção de espaço, se usarmos a noção de força de uma classe.

No fim do século passado e começo deste, todos os elementos necessários para uma definição satisfatória de acaso e probabilidade estavam dados e foi somente uma questão de tempo até que alguem tivesse a ideia de combinar esses elementos. Aconteceu que essa tarefa me coube a mim. Ao estudar o trabalho de Bertrand Russell sobre os principios da matemática, surgiu-me a ideia de que a teoria das classes e a doutrina do acaso lógico são a única base possivel para o calculo de probabilidade. A ideia parecia obvia e foi para mim uma surpreza que nem Bertrand Russel nem algum dos autores contemporâneos tirasse essa conclusão. Muitos anos depois tive a satisfação de ver que eu havia compreendido corretamente as teorias lógicas de Bertrand Russell, pois em um dos seus livros mais recentes ele apresenta uma teoria da probabilidade que, nos seus pontos esenciais, é idêntica à minha.

9) **A probabilidade como medida de um estado psíquico.** — A simples enumeração das várias definições de probabilidade seria muito enfadonha. A maioria delas pode ser considerada imediatamente como insuficiente, de maneira que não vale a pena entrar na sua discussão. Discutiremos somente duas teorias porque exigem consideração cuidadosa e são apresentadas por autores proeminentes. Ambas pertencem ao tipo empírico. A primeira dá a interpretação psicológica e pode ser convenientemente chamada teoria psicológica da probabilidade. A segunda é conhecida por Teoria da Frequencia e conta atualmente com um número consideravel de partidários. A primeira teoria vê na probabilidade matemática a medida de um estado mental. Algumas vezes esse estado é designado como a nossa crença na verdade de uma proposição, outras como a nossa espectativa em relação a um acontecimento passado ou futuro. Parece que Condorcet foi o primeiro a apresentar o ponto de vista de que a probabilidade matemática é uma medida exata da nossa crença. Esta teoria encontrou muitos partidários na Inglaterra e podemos citar J. S. Mill, Jevons, Boole e de Morgan como seus representantes mais eminentes. As palavras do último desses autores citados oferece uma boa visão dessa doutrina: "Por grau de probabilidade queremos dizer realmente, ou deveriamos querer dizer, o grau de crença". A posição desta teoria não melhora materialmente se se dissér que a probabi-

lidade é somente a crença racional, pois esta é tão pouco accessivel à mensuração quanto a crença irracional.

Esta doutrina também encontrou partidários fóra da Inglaterra. Foi muito bem expressa nas palavras de B. Bachelier: "Em conclusão, a base mais sólida para a probabilidade é a posição propriamente psicológica. O que medimos no cálculo de probabilidade é a nossa espectativa. Para certos autores esta espectativa parece mesmo ser inteiramente subjetiva."

O caso de R. Laemmel, autor alemão que escreveu sobre os métodos de determinação das probabilidades, é curioso. Usou a teoria das classes, mas não se libertou da concepção subjetiva da probabilidade. Atribue a cada elemento das classes um certo "gewicht", palavra que indica a importancia que atribuimos ao elemento e que é determinada por processos subjetivos.

O caso de U. Broggi é semelhante. Introduz o axioma de que é possivel selecionar um elemento de um grupo de tal fórma que a definição nada diz sobre a presença ou ausencia de um certo atributo. Broggi observa que isto é uma condição subjetiva que depende do estado das informações que possuimos. O seu axioma, na realidade, é de natureza alógica e nada tem que ver com o estado da ignorancia em que nos podemos encontrar.. A questão de saber se os estados mentais são ou não mensuraveis encontrava-se na base da interminavel discussão sobre a lei de Weber na psicofísica. As observações que são expressas por essa lei referem-se a sensações e são corretas, mas não constituem uma prova da afirmação de que as sensações são mensuraveis. Com a mesma confiança fazemos a afirmação de que estados mais complicados, como sentimentos, crenças e espectativas, não são mensuraveis.

O fato de que os estados mentais não são mensuraveis liquida o caso da concepção psicológica da probabilidade matemática. Um outro argumento decisivo contra esta teoria é a dificuldade de explicar como uma noção puramente subjetiva pode ter significação objetiva, significação essa que o teorema sobre o cálculo de probabilidade possue. Não é de surpreender que este ponto de vista fosse amplamente aceito na última parte do século XIX. A doutrina de Fechner de que os estados mentais são mensuraveis sugeriu o ponto de vista de que a probabilidade constitue essa medida.

10) **A teoria da frequencia.** — O ponto de vista de que a probabilidade de um acontecimento é idêntica à sua frequencia relativa em um grande número de observações, chama-se teoria da frequencia. Suponhamos que tenham sido feitas **n** observações do acontecimento E e em **m** delas o acontecimento E se verificou. Então a proporção é a probabilidade de E, se **n** fôr grande.

Deixem-me citar primeiro as palavras com as quais Leslie Ellies introduz esta teoria: "Se a probabilidade de um acontecimento dado fôr corretamente determinada, o acontecimento após um número consideravel de provas, tenderá a ocorrer com frequencia proporcional à sua probabilidade. Em geral isto se prova matematicamente. Parece-me ser verdade a priori. ...Não fui capaz de separar o julgamento de que um acontecimento tem mais possibilidades de acontecer que outro, da crença de que afinal ocorrerá com maior frequencia." Esta teoria é habitualmente atribuida a Venn que, no seu trabalho "Lógica do Acaso" foi o primeiro a trata-la de maneira completa. Essa teoria encontrou muitos partidários e conta com dois pontos muito importantes a seu favor: 1) A origem empírica da noção de probabilidade e 2) a sensação obscura de que a probabilidade se relaciona, de uma fórma qualquér, com a frequencia dos acontecimentos.

As provas matemáticas de que fala Leslie Ellis, referem-se ao teorema de Bernoulli, cujo ponto essencial é que os acontecimentos tendem a ocorrer com frequencias proporcionais às suas probabilidades. Bernoulli percebeu que temos um sentimento indistinto da veracidade desta proposição, pois escreveu em 1702: "...etiam stupidissimus quisque nescio quo naturae instinctu per se et nulla previa institutione norit, quod quo plures observationes fiunt, hoc minus a scopo aberrandi periculum sit". Mais de 200 anos mais tarde o professor E. G. Boring, da Universidade de Harvard, sugeriu que os motivos que influenciam o julgamento de um individuo quanto à probabilidade de um acontecimento deveriam ser investigadas experimentalmente e diz que a espectativa psicológica é uma função da frequencia e de outras condições que concorrem para determinar as tendencias.

Não se tem certeza absoluta de que Bernoulli esteja certo quando diz que nenhuma instrução é necessária. Absorvemos informações não somente por meio de cursos e frequencia às aulas, mas tambem através dos contactos diários, e estas convicções são, talvez, mais fortes porque são formadas e aceitas sem raciocinar. A afirmação de Bernoulli de que muito pouca inteligencia é necessária para apreender a veracidade do seu teorema é um pouco arrojada, pois os "stupidissimus quisque" que não acreditavam na probabilidade foram encontrados. E o fato de serem homens de grande inteligencia e elevada cultura aumenta o sabôr da história.

Os fundadores da "Equitable", a famosa companhia inglesa de seguros de vida, encontraram grandes dificuldades quando requereram, em 1761, um alvará que os autorizasse a negociar de acôrdo com as observações relativas à mortalidade. Tres das companhias já existentes protestaram contra isso e o requerimento foi indeferido. A recusa foi dada em um longo documento escrito por dois eminentes peritos, que argumentavam que o êxito de um empreendimento dessa espécie "deveria depender da veracidade de certos cálculos feitos sobre tabelas de vida e morte, por meio dos quais se tentaria reduzir a um certo padrão a probabilidade da mortalidade. Isso não passa de mera especulação que jamais se tentou na prática e que consequentemente está exposta, como todos os experimentos, a várias vicissitudes na sua execução". Os autores deste documento evidentemente não acreditavam na teoria da frequencia. Meio século após a morte do seu criador, o teorema de Bernoulli, aparentemente, não havia ganho muito terreno fóra do círculo dos matemáticos profissionais.

A história da teoria da frequencia é curiosa. Os trabalhos de Leslie Ellis, o primeiro dos quais apareceu em 1824, permaneceram praticamente desconhecidos. Tanto maiór, por essa razão, foi o sucesso de Venn, cujo livro surgiu em 1866 e foi reeditado em 1867 e 1888. A sua inflencia na Inglaterra foi e continua a ser grande e a sua insistencia no sentido de que a experiencia deve ser o nosso único guia sem dúvida casou-se bem com a maneira realística de pensar dos ingleses. A maioria dos que escreveram sobre a probabilidade abordaram o problema do ponto de vista estatístico. Por algum tempo a sua influencia limitou-se aos paises de lingua inglesa e em 1920 Keynes podia com razão escrever que não conhecia, no estrangeiro, partidários convictos dessa opinião.

Dessa época para cá, a teoria da frequencia tomou novo impulso, influenciando vários autores germânicos dos quais Tornier, Mises e Reichenbach são os mais importantes. O primeiro destes concentrou-se na dedução axiomática e os seus trabalhos são altamente técnicos. Mises escreveu um extenso livro sobre o cálculo de probabilidade, no qual se mostra um habil manipulador de fórmula. A exposição de pontos de vista gerais não é o seu forte e o seu livro sobre a verdade, a probabilidade e a estatística não é muito apreciado. O trabalho de Reichenbach parece-me, oferece a melhor introdução para quem quizer familiarizar-se com esta fórma moderna da teoria da frequencia.

Os autores alemães discordam de Venn em um ponto essencial. Fazem referencia a séries infinitas e não a séries finitas. Esse expediente torna a dedução e a apresentação das proposições mais facil, mas faz com que a teoria da frequencia perca contacto com a experiencia, na qual somente são dadas séries finitas. Definir a probabilidade como um limite jamais alcançado na experiencia, resulta em uma dessas construções lógicas contra o uso das quais Venn vem lutando. Ele certamente se recusaria a considerar como empírica uma teoria que partisse de considerações baseadas em séries infinitas.

A frequencia de um acontecimento em uma série infinita imaginada não tem nenhum valor prático. Tomemos como exemplo a mortalidade. A frequencia da morte para as pessoas de um dado grupo de idade, varía no tempo segundo as condições higiênicas e sanitárias existentes em um dado país. Se essas observações continuarem a ser feitas indefinidamente, o valor final terá significação somente para a série como um todo, mas não para qualquer período particular. No caso do Rio de Janeiro, essa proporção se situaria em um ponto qualquer entre o valor que tem hoje e o que tinha antes de Osvaldo Cruz. Por outras palavras, não se refere a nenhuma experiencia real. Os que acreditam nesta fórma da teoria da frequencia postulam a possibilidade da repetição indefinida do acontecimento cuja probabilidade se pretende determinar. As expressões abstratas cobrem a suposição inaceitavel de que as condições predominantes em um momento dado se manteem indefinidamente.

O teorema de Bernoulli é um osso duro de roer para os seguidores desta teoria, porque pressupõe: a) que existe uma **probabilidade** para as frequencias relativas que se aproximam de um limite, quando existe **certeza** quanto à definição fundamental da teoria da frequencia; b) que as frequencias relativas em séries parciais se distribuem segundo a probabilidade integral, quando os axiomas da teoria não conteem tal restrição. Isto significa que algumas séries são admitidas segundo os princípios da teoria, para serem mais tarde excluidas, por não estarem de acôrdo com as estipulações mais rigorosas de uma proposição derivada dos mesmos princípios.

Não é suficiente desenvolver-se a teoria da frequencia **in abstracto**. Pretende-se que esta teoria seja empírica, devendo, pois, basear-se na experiencia, e não exclusivamente em considerações teóricas. É claro que não se pode demonstrar experimentalmente a aproximação das frequencias relativas a um limite, mas pode exigir-se que esta aproximação seja ilustrada por observações convincentes e bastante numerosas. É surpreendentemente pequeno o número de exemplos disponiveis para este propósito, e poucos dentre eles suportam uma análise demorada. Muitos dos exemplos tomados da física são inadequados aos propósitos da teoria da frequencia, desde que mostram somente os penúltimos estágios, e não as fases iniciais e intermediárias. Em processos do tipo do problema de Daniel Bernoulli, podemos seguir este desenvolvimento em nossas fórmulas — isto é, em nossos pensamentos — em todos os detalhes, do começo ao fim, mas não há observações práticas, não tendo portanto estes exemplos nenhum valor para os propósitos da teoria da frequencia.

Não é provavel que a teoria da frequencia possa ser elaborada em um sistema realmente satisfatório. Deve ela sua popularidade a seu recurso à experiencia, e não ha dúvida quanto à origem empírica da noção de probabilidade matemática. Parece razoavel considerar-se este conceito do mesmo modo como as outras noções abstratas da matemática, por exemplo o conceito de linha reta ou de plano. Estas noções estão encaixadas em definições que não conteem traço algum dos processos psicológicos por que foram elaboradas. Pode ilustrar-se, por exemplo, a noção de linha reta como o limite de uma série de cilindros de comprimento crescente e diâmetro decrescente. Mas a definição de linha reta em um sistema de geometria não contém referencia alguma à origem desta ideia. Exatamente como a geometria, o cálculo de probabilidade deve ser desenvolvido como um sistema de proposições abstratas, sem nenhuma referencia à experiencia factual. Se puder ser demontrado que alguns fatos da experiencia estão de acôrdo com os requisitos do cálculo de probabilidade, como consequencia lógica ter-se-á que as proposições desse cálculo são afirmações corretas sobre esses fatos.

É um engano reter-se na definição de probabilidade matemática qualquer referencia ao modo como foi obtido este conceito. O conceito puramente lógico de probabilidade mantem que as proposições derivadas desta noção não contradizem os axiomas. Se, nos axiomas, for feita qualquer referencia a constancia aproximada das frequencias relativas, como faz a teoria da frequencia, surgirão contradições que até agora ninguem pôde desfazer. Se se encontrar um modo de tornar aceitaveis estas contradições, as proposições são desnecessáriamente envolvidas pela referencia à experiencia. Este fato é visto no "Wahrscheinlichkeitsrechnung" de Mises, que frequentemente dá ao leitor a impressão de que o mesmo resultado poderia ter sido obtido com muito menos esforço. Todos os tratados sobre a teoria da frequencia, o de Reichenbach inclusive, fazem lembrar uma tentativa de formularem-se as proposições da geometria de tal modo que se apliquem a cilindros de diâmetros pequeníssimos, não a linhas retas ideais.

A teoria da frequencia exerce grande fascinação sobre a mente humana, podendo-se mesmo dizer que constitui a opinião natural do homem medianamente inteligente dos nossos dias. A este respeito, é instrutivo interrogarem-se pessoas da classe chamada educada, quanto a suas ideias sobre acaso e probabilidade. Devem-se naturalmente excluir destas pequenas experiencias as pessoas que tiverem recebido instrução sobre estes problemas. O que se quer obter é a opnião do homem médio, que seja inteligente bastante para falar coerentemente. Às vezes encontramos uma explicação mística, ou uma bem intencionada tentativa de explicar o acaso com ausencia de conexões causais. Algumas respostas explicam o acaso como o que não acontece senão raramente, ou como coincidencias temporais ou espaciais. Já encontrei pessoas que se recusaram a considerar o aparecimento de "cara" ao atirar uma moéda, como um acontecimento fortúito, mas não hesitaram em falar em acaso ao atirar um dado e obter um "seis". A grande maioria das respostas sobre probabilidade repousa em termos de percentagens. Parece que a teoria da frequencia, sob uma fórma rudimentar, constitue parte do mal definido grupo de ideias que fórma o quadro de conversação de todos os dias. Estas ideias não são transmitidas pela instrução, mas sim absorvidas no intercâmbio diário. A este respeito, Venn é um lógico dos mais influentes, enquanto que seus outros méritos estão mais ou menos esquecidos. Pode ser que isto seja apenas um traço de nosso modo ocidental de pensar. Entre as pessoas que interroguei estavam cinco orientais, dos quais quatro tinham estudado em escolas americanas ou européias, e prontamente reproduziram a teoria da frequencia em suas respostas. Minha conversa com o quinto foi um memoravel fracasso. Tratava-se de um jovem indú, muito inteligente, em sua primeira visita aos Estados Unidos. Não obstante consideravel esforço de ambos os lados, não consegui fazer claro o sentido de minhas perguntas e não obtive uma resposta satisfatória. Sua primeira formação, que fôra bastante completa, não o tinha familiarizado com o nosso modo de pensar sobre acaso e probabilidade.

Façamos uma revisão da discussão da teoria da frequencia. Se seguirmos Venn e nos limitarmos ao uso das séries finitas, obteremos proposições intimamente relacionadas com a experiencia, mas incômodas e de restrita generalidade. Se a definição de probabilidade se basear sobre as séries infinitas, as proposições resultantes não terão conexão imediata com a experiencia. As proposições possuirão maior generalidade.

A teoria de Venn é coerente ou podemos, com um pouco de esfôrço, torna-la coerente. A fórma germânica da teoria da frequencia leva a uma contradição em relação ao teorema de Bernoulli.

A teoria da frequencia não pode resolver o caso das probabilidades não numéricas.

A teoria da frequencia tira dos resultados conclusões relativas às condições destes, e isto deve dar um tratamento mais complicado que concluir das condições quanto aos resultados. Um manual sobre a probabilidade, tal como é definida na fórma germânica da teoria da frequencia, é uma coisa muito enfadonha.

11) **Como escrever um manual sobre a probabilidade.** — A amplitude das aplicações do cálculo de pro-

babilidade cobre praticamente todo o campo da experiencia, desde a física até a psicologia, e é inconcebivel que uma pessoa seja igualmente competente em todos esses campos. Émile Borel foi o primeiro a inferir as consequencias práticas corretas desse fato: um trabalho sobre o cálculo de probabilidade, para ser exaustivo e digno de ser considerado como autoridade no assunto, deve ser escrito por um grupo de homens. Borel, que era, ele proprio, um pensador eminente e experimentado, reuniu um grupo de amigos e companheiros de trabalho e confiou a cada um deles o tratamento dos problemas em que se haviam especializado. A ele proprio coube a tarefa de dirigir e coordenar esses esforços.

Nem o trabalho de Borel, nem a Théorie Analytique de Laplace são manuais proprios para serem usados em um curso de conferencias. Um simples olhar lançado a este último livro convence-los-á da verdade desta afirmação. Começa com 180 páginas de fórmulas, cujo uso e significação permanecem ignorados até que se digira o livro inteiro. Não creio que alguem tenha jamais conseguido ler esse livro na primeira tentativa. Apesar do seu grande mérito, foi esse livro responsavel pelo fato de que o cálculo de probabilidade não fosse muito estudado na primeira parte do século passado. As pessoas estavam convictas de que não poderiam iniciar esse estudo sem ter primeiro dominado o trabalho de Laplace e era evidente que isso exigiria um grande esforço. A dificuldade poderá ser melhor compreendida pelo fato de que Todhunter considerava a sua história do cálculo de probabilidade, um trabalho de 600 páginas, como um comentário à Théorie Analytique. Os trabalhos de Laplace e de Borel não são manuais, mas sim fontes das quais os autores de manuais devem extrair as suas informações.

O primeiro manual realmente bom foi o Calcul des Probabilités, de Josef Bertrand, publicado em 1888. O livro pretende satisfazer as necesidades dos estudantes e sua apresentação é completamente diferente da de Laplace. A matemática é do tipo mais simples possivel, mas consegue explicar as proposições mais interessantes e importantes do cálculo de probabilidade. O livro de Bertrand serviu de modelo para muitos trabalhos semelhantes.

Não existe um manual que convenha a todos os estudantes. O autor de um manual precisa conhecer a classe de leitores para a qual escreve, bem como saber quais os conhecimentos que os leitores possuem. As universidades planejam os cursos que os esudantes deverão seguir, e na maioría delas o cálculo de probabilidade é destinado aos alunos de segundo ano. Isto signiifca que já estão familiarizados com o cálculo diferencial e com a álgebra. O êxito do livro de Czuber é devido não somente à competencia e à erudição do autor, mas tambem à correta avaliação dos conhecimentos de que dispõem os estudantes.

Um dos pontos que o autor de um manual tem que resolver é fixar o ponto em que devem ser introduzidos teoremas provavelmente desconhecidos dos leitores. Czuber os introduz no momento em que se tornam necessários. Este método tem a vantagem didática de dar ao aluno a oportunidade de aplicar imediatamente o conhecimento que acabou de adquirir. Tem a desvantagem de exigir que se esteja muito familiarizado com o livro para encontrar uma citação. Charles Jordan, na sua Statistique Mathématique, segue o exemplo de Laplace e começa com uma introdução puramente matemática que, graças à habilidade do autor, não é muito longa. Os professores parecem concordar que é inconveniente iniciar um curso com uma série de aulas sobre um assunto que não interessa ao aluno. Talvez seja melhor tomar como modelo os manuais de física. A maioria dos alunos de um curso sobre o cálculo de probabilidade ou métodos estatísticos não tem interessa imediato pela matemática. Para eles a matemática é apenas um instrumento util. Se quiserem matar o interesse dos seus alunos, basta iniciarem seus cursos com um grupo bastante grande de teoremas abstratos.

CAPITULO V

O PRINCÍPIO DA INDIFERENÇA

1) **Definição de probabilidade igual.** — Não existe diferença entre os elementos da mesma classe em relação aos atributos afirmados na definição da classe. O único ponto decisivo é a presença dos atributos A e a presença ou ausencia de quaisquer outros atributos é indiferente. Selecionar um objeto que pertence à classe M não determina um elemento particular da classe, mas a nossa escolha pode cair sobre qualquer objeto que possua o atributo A. Isto dá a definição: os elementos da classe M teem a mesma probabilidade com referencia a esta classe.

Esta definição de probabilidade igual, embora altamente abstrata, tem suas fontes na prática da vida diária. Consideremos esta afirmação, que faz parte da ordem do dia de um regimento: "A guarda consiste em um cabo e cinco soldados". Isto significa que qualquer pessoa qualificada respectivamente como cabo ou como soldado, servirá para os fins da guarda e é indiferente que seja esta ou aquela a pessoa realmente escolhida. Outro exemplo pode ser encontrado na moderna produção em série. Cada máquina consiste em muitas partes e deve haver um grande suprimento de cada uma delas. É indiferente que seja este ou aquele o exemplar usado, no que diz respeito ao funcionamento da máquina.

O cálculo de probabilidade introduz a probabilidade igual dos casos como um dos seus axiomas que não podem ser discutidos. O caso é diferente quando analisamos fenômenos físicos reais, pois então jamais podemos estar certos de que a suposição se aplique ao caso. Na maioria dos casos, o problema diz respeito ao processo físico por meio do qual os objetos são selecionados. Temos que definir as nossas classes e isto implica na definição dos casos que são considerados como igualmente provaveis. Este problema pode ser abordado de duas maneiras, para os quais se usam as seguintes denominações: "principio da razão cogente" e "principio da indiferença". É importante ter em mente que a diferença entre estas duas maneiras de raciocinar só entra em jogo quando estamos tratando de fenômenos naturais.

2) **Os princípios da razão cogente e da indiferença.** — O principio da indiferença diz que é justificado supôr uma probabilidade igual dos casos quando não ha razão para que um acontecimento se dê mais facilmente que outro. A ausencia de um argumento contra a probabilidade igual é considerada suficiente para prova-la. O principio da razão imperativa ou cogente exige que a probabilidade igual seja apoiada em fatos.

Jakob Bernoulli preocupou-se muito com as condições sob as quais um valor numérico pode ser atribuido a uma probabilidade. A noção de probabilidade igual assumiu, nas suas mãos, uma fórma em que é util para o raciocinio preciso. Ele não inventou essa noção, que tem suas origens na experiencia diária e foi objeto de especulações filosóficas por muito tempo. A noção de probabilidade igual é quasi idêntica à de força igual dos argumentos. O cético grego Pirro usou essa expressão para designar o equilibrio entre os argumentos pró e contra uma proposição. Acreditava que esse equilibrio existe em relação a qualquer ponto de vista que se possa apresentar, de maneira que era dever do indivíduo abster-se de formar qualquer opinião ou convicção.

Kries chamou atenção para os absurdos aos quais o uso descuidado deste principio da indiferença pode levar e exigiu que a suposição da probabilidade igual fosse apoiada em fatos. Este ponto de vista é muito sensato e não deixou de impressionar a maioria dos autores que escreveram sobre esse problema. A unanimidade de opinião não nos deve levar a julgar incorretamente o princio da indiferença. Indica uma condição necessária, pois as probabilidades não podem ser iguais quando existe um argumento contra esta suposição. É claro tambem que ninguem raciocinará pelo princípio da indiferença se dispuser de dados para uma razão imperativa.

A diferença entre estas duas maneiras de raciocinar não é grande contanto que se proceda cuidadosamente. O principio da razão cogente acentua a exigencia de que os nossos pontos de vista devem basear-se em informações positivas e assim nos previne de que não devemos ser apressados nas nossas deduções. A dificuldade é que muitas vezes não se dispõe de informação alguma, e temos que nos decidir de uma fórma ou de outra. Nesse caso, não deixaremos de usar o principio da indiferença, por mais que os teoristas nos tenham prevenido. Não negaremos que raciocinar pelo principio da indiferença pode levar a consequencias absurdas e ridiculas. Começaremos por um exemplo no qual a diferença entre estas duas maneiras de raciocinar não vai além de uma diferença de ponto de vista. Em um caso insistimos em que certas informações sejam dadas, e no outro acentuamos o fato de que as nossas informações a respeito de qualquer fato físico são sempre incompletas.

3) **Exemplo.** — A probabilidade de obter um certo resultado ao atirar um dado depende dos ângulos sob os quais as seis faces são vistas do centro de gravidade. O centro de gravidade e o centro geométrico coincidem em um dado ideal e os seis ângulos são iguais. Portanto, as probabilidades dos seis resultados são iguais em um dado ideal. Mas o dado que realmente usamos não é um cubo perfeito, e nem sua massa é homogênea. Os ângulos sob os quais são vistas as seis faces são diferentes e as suas probabilidades não podem ser iguais.

Se eu acentuar o fato de que percebo o dado como um cubo, estarei procedendo de acôrdo com o principio da razão cogente se supuser que as probabilidades das seis faces são as mesmas e iguais a 1/6. Mas a percepção sensorial é inexata e uma investigação mais rigorosa mostrará que a massa do dado não é homogênea e que a sua figura não é um cubo ideal. Se eu acentuar o fato de que é impossivel dizer de que maneira estas probabilidades serão afetadas, estarei argumentando segundo o principio da indiferença se dissér que as probabilidades das seis faces são iguais e teem o valor de 1/6.

Os ângulos sob os quais são vistas as faces do dado do seu centro de gravidade, não podem ser determinadas com exatidão alguma. Assim não podemos determinar as probabilidades dos diferentes lances e calcular-lhes as frequencias. É mais facil partir das frequencias observadas para concluir quais as probabilidades correspondentes. Foi isto que fez R. Wolf quando obteve nos seus experimentos frequencias diferentes do valor teórico 1/6.

As nossas informações sobre os fatos nunca são precisas e estão sempre sujeitas à correção pela experiencia subsequente. Somente a experiencia nos pode dizer se os dados sobre os quais baseamos nossos cálculos são ou não corretos. Neste exemplo, o principio da indiferença leva a uma formulação mais atraente porque põe em evidencia a limitação dos nossos conhecimentos. As informações sobre as quais se poderia basear um argumento regido pelo princípio da razão cogente são muito escassas. Poderiamos melhora-las medindo o dado e examinando a homogeneidade da materia que o constitue, mas nenhum acervo de infirmações é exaustivo e sempre ha alguns pontos sobre os quais seriam de desejar novas informações.

4) **Uso errôneo do principio da indiferença.** — Este principio se presta ao abuso e então leva a consequencias absurdas, que lançam uma luz desfavoravel sobre o raciocinio aplicado à probabilidade. Na maioria dos casos é o seguinte o raciocinio que se encontra na base do argumento: temos diante de nós uma proposição na qual se afirma que um determinado atributo pertence ao sujeito, mas não existem informações relevantes quanto à verdade desta proposição. Todas as proposições são ou verdadeiras ou falsas, e estamos em estado de idêntica ignorancia relativamente a esses dois casos possiveis. A proposição tem iguais possibilidades de ser verdadeira ou falsa, o que significa que a sua veracidade tem uma probabilidade de ½.

A nossa resposta é a mesma do exemplo do livro de Ahmes: não é possivel atribuir uma probabilidade numérica à afirmação porque não existe uma classe de referencia. Se definíssemos a classe de todas as proposições verdadeiras, com certeza não encontrariamos o valor de ½ para a probabilidade de que uma proposição feita ao acaso fosse verdadeira.

A precisão numérica obtida dessa fórma é absolutamente destituida de valor. Qual é a probabilidade de que um determinado elemento químico seja encontrado em certo corpo celeste, em Sirius, por exemplo? Partindo do fato de que não possuimos informações quer a favor, quer contra, atribuimos à probabilidade de ser encontrado este elemento em Sirius o valor de ½. Este raciocinio é válido em relação a qualquer outro elemento químico e a probabilidade de que nenhum de **n** elementos químicos dados seja encontrado em Sirius é: $1 - (½)^n$, ou seja, praticamente indistinguivel da certeza, se **n** for o número dos elementos químicos.

A precisão numérica deste resultado é evidentemente ilusória. Se a pusermos de lado, o resultado significará simplesmente que não seria de admirar se um ou outro dos nossos elementos químicos faltasse em Sirius, mas que é praticamente certo que a constituição química dessa estrela não deve ser inteiramente diferente da constituição da terra. Isto é pouco mais que um lugar comum, pois somente um crente convicto da teoria grega de que os fenômenos celestes e terrestres são fundamentalmente diferentes, hesitaria em aceita-la. O principio da indiferença, neste exemplo, dá uma precisão ilusória a uma afirmação algo trival, mas no exemplo seguinte leva a uma evidente contradição.

Suponhamos que não possuimos informação alguma quanto ao tamanho e à população dos vários paises da terra. O principio da indiferença, neste caso, nos autoriza a considerar igualmente provavel que uma pessoa apanhada ao acaso seja um cidadão da França ou da Inglaterra, pois não há razão para preferir uma ou outra das duas hipóteses. Pela mesma razão, é igualmente provavel que fosse um habitante da Irlanda ou da França, o que leva à conclusão de que é duas vezes mais provavel que fosse habitante das Ilhas Britânicas que da França. A contradição que este argumento implica não se teria tornado aparente, se nos tivéssemos detido no primeiro estágio.

A noção de probabilidade igual dos casos apresentou grandes dificuldades em toda a discussão do cálculo de probabilidade. Os estudiosos concentraram a atenção no processo de seleção pelo qual os acontecimentos individuais chegam à nossa percepção, e procuraram descobrir nele uma qualidade ou atributo cuja presença garantisse o carater fortúito da seleção. Tal atributo não existe e nunca poderemos ter certeza de que um dado processo físico realiza o carater fortúito da seleção.

Henri Poincaré acredita que todas as definições de probabilidade são uma **petitio principii**, porque é impossivel admitir uma possibilidade igual de casos. É verdade que a probabilidade igual dos casos nunca pode ser provada de maneira conclusiva em um acontecimento real. Nunca possuimos um conhecimento completo do processo de seleção e não existe uma refutação decisiva da afirmação de que existem diferenças entre as probabilidades, mas são pequenas demais para que as possamos descobrir. A observação de Poincaré é irrelevante em relação à proposição abstrata, pois aqui a probabilidade igual dos casos é postulada. Somente o estudo do processo de seleção e dos resultados obtidos pode indicar se nos casos reais as condições correspondem às exigencias do cálculo de probabilidade.

5) **Uso adequado do princípio da indiferença** — Esse raciocínio não apresentará inconvenientes se o seu resultado fôr tomado pelo que realmente vale, isto é, como uma tentativa de formar uma opinião relativamente a uma situação que não é clara. Na vida prática frequentemente temos que tomar decisões dessa espécie. O seguinte exemplo apresenta um caso em que é preciso tomar uma decisão, tendo como único guia o principio da indiferença. É um problema tirado da prática dos seguros marítimos, no qual o segurador tem que resolver qual o premio que deve pedir pelo seguro contra um novo risco. O segurador não pode recusar-se a fazer o seguro, pois do contrário perderia sua clientela e tem que apoiar com dinheiro a sua decisão.

O Tribunal de Apelação dos Estados Unidos decidiu em 1934 que o segurador não é obrigado, pelos termos da apólice comum de seguro marítimo, a pagar a indenização que um navio segurado tem que pagar em consequencia de uma colisão em que ambas as partes são culpadas. Essa decisão se refere à indenização da carga que, de acôrdo com a lei americana, o navio que não a levava tem que pagar. Este navio pode exigir o dinheiro do navio que levava a mercadoria.

Antes dessa decisão, as companhias de seguro eram responsaveis por essa indenização, mas esta decisão atribuiu essa responsabilidade aos proprietários dos navios, que procuraram livrar-se dela fazendo figurar no conhecimento uma cláusula que transfere essa responsabilidade ao dono das mercadorias. Essa é a chamada cláusula de "Ambos culpados" (Both to blame"), e os seguradores viram-se na contingencia de calcular o premio a ser cobrado pela inclusão deste novo risco.

Um leitor da "Lloyd's List" avaliou que 1/24% era um preço razoavel para incluir o risco resultante dessa cláusula. Argumenta ele que um quinto do premio F. P. A. ("Free from particular average" — livre de avaría particular) é empregado para cobrir o risco da colisão e que é tão provavel que uma colisão se dê sob jurisdição americana como fóra dela. Isto dá um décimo do premio F. P. A. para o risco existente sob a jurisdição americana. Ha tres possibilidades relativamente à responsabilidade no acidente: ou um navio ou o outro é responsavel, ou a responsabilidade é dividida. Isto reduz o acréscimo do premio a 1/30, e disto temos que tirar a metade, pois somente 50% de indenização paga pode ser reclamada. O premio habitual para os riscos marítimos em questão é 0,25% na notação usual, o premio para cobrir a clausula "Both to blame" é 1/24% da quantia segurada.

O autor anônimo deste raciocínio foi severamente criticado, mas ha alguma coisa a dizer em seu favor. É preciso encontrar um premio que o segurado esteja disposto a pagar, e que o segurador possa aceitar sem grande perigo de prejuizo. Na prática, esses casos são facilmente resolvidos partindo de um premio aceitavel para ambas as partes e alterando-o como fôr conveniente. Após a primeira guerra mundial, as minas flutuantes constituiam um perigo consideravel para a navegação e os premios para cobrir este risco eram muito altos. À medida que progrediu o trabalho de limpeza do oceano, as taxas foram caindo e após alguns anos o perigo das minas passou a ser incluido no seguro gratuitamente. O ponto decisivo é que, em certas situações, uma certa probabilidade tem que ser expressa numericamente e o princípio da indiferença tem que ser forçosamente aplicado.

As necessidades do investigador são, de acôrdo com a minha maneira de pensar, tão urgentes quanto as do homem de negocios.

Vamos julgar o seguinte problema desse ponto de vista. Leibniz interessou-se por saber a soma da série

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 \ldots$$

continuada indefinidamente. Se tomarmos um número par de termos, o valor será zero, mas se o número de termos fôr ímpar, o valor será um. Leibniz argumenta da seguinte fórma: uma vez que não ha razão para supôr que na série infinita a probabilidade de um número par de termos seja diferente da probabilidade de um número impar, e valor da série infinita é a média aritmética entre 0 e 1, ou seja, 1/2. Leibniz diz que este raciocínio é mais metafísico que matemático, mas considera-o imperativo.

Laplace condenou esse raciocínio com expressões fortes, que foram repetidas por muitos dos seus partidários. O julgamento de Bertrand sobre um êrro semelhante é mais brando e mais justo. Os maiores matemáticos teem escrito sobre o cálculo de probabilidade e quasi todos teem cometidos erros. Esses erros, na maioria dos casos são devidos ao desejo de aplicar os teoremas do cálculo de probabilidade a problemas que, pela sua natureza, são inaccessiveis ao tratamento científico. A isto poderemos acrescentar que o investigador, trabalhando na fronteira do desconhecido, tem a liberdade de seguir qualquer caminho que pareça levar ao êxito. O principio da indiferença se tem mostrado util em um número de casos grande demais para que seja posto inteiramente de lado, e as advertencias de lógico algum impedirão o investigador de emprega-lo nos casos em que a única alternativa seria resignar-se a abandonar o problema.

6) **Problemas indeterminados** — Se as classes M e T não forem claramente definidas, nenhuma afirmação sobre probabilidade é possivel. A falta de precisão no propôr o problema leva ao fato aparentemente surpreendente de que teremos várias soluções, as quais se apresentam todas como corretas. Isto constitue a peculiaridade de um grupo de problemas conhecidos pelo nome de probabilidades geométricas. Ilustraremos esta dificuldade com o problema chamado "paradoxo de Bertrand", que adquiriu certa notoriedade.

O problema diz o seguinte: traça-se ao acaso uma corda em um círculo. Qual é a probabilidade de que essa corda seja maior que o lado de um triângulo equilátero inscrito?

As palavras: "traçar uma corda ao acaso", admitem pelo menos cinco interpretações diferentes, e o problema não especifica qual delas é usada. Vamos mencionar apenas duas. 1) A extremidade da corda é escolhida e a corda é traçada em uma direção arbitrária; 2) o centro da corda é escolhido arbitrariamente. Bertrand estudou tres soluções e perguntou qual delas estaria correta. Ele dá a resposta correta de que o problema está mal formulado. Para que seja posivel obter uma solução, é preciso dizer o que se deve entender por traçar uma corda ao acaso. É preciso acrescentar alguma coisa ao problema para poder dar-lhe uma solução, o que significa que o problema, tal como está, não tem solução.

Facilmente se pode inventar um número indefinido de problemas semelhantes e propô-los para serem solucionados. São problemas abstratos e não teem relação imediata com a realidade. A situação será diferente se tivermos que lidar com um processo real, pelo qual se realize o traçado ao acaso de uma corda. Então haverá somente uma hipótese correta e as deduções lógicas dela tiradas possuirão verdade empírica, como descrições corretas de fatos observados.

CAPITULO VI

A PROBABILIDADE IGUAL NA EXPERIENCIA

1) **Classificação dos acontecimentos casuais** — Ao aplicar o cálculo de probabilidade à experiencia real, devemos averiguar se as condições sobre as quais se baseiam os teoremas são dadas ou não. Isto se faz tomando grandes grupos e comparando os resultados do cálculo com os dados realmente observados. Os acontecimentos fortúitos, quando tomados em grandes grupos, conformam-se com as regras do cálculo de probabilidade.

Muitas vezes fazemos, com grande confiança, a hipótese da probabilidade igual quando não temos à mão esse material estatístico. Justificamos essa maneira de proceder pelos nossos pontos de vista quanto à natureza dos processos que dão aos acontecimentos o carater casual. Acreditamos conhecer os acontecimentos que justificam o uso do cálculo de probabilidade, e ficamos surpreendidos quando uma investigação mais rigorosa mostra que estamos errados.

Esses processos diferem muito em carater, mas a experiencia tornou-os familiares e acreditamos poder reconhece-los. Os processos que resultam em acontecimentos do carater exigido pelo cálculo de probabilidade dividem-se em dois grupos. Um acontecimento representativo do primeiro grupo é o jogo da roleta, e do segundo o ato de embaralhar as cartas. Esta não é uma classificação dos acontecimentos fortúitos em geral, mas apenas daqueles que são tratados pelo cálculo de probabilidade. Não afirmo que estes sejam os únicos tipos de processos que resultam em causalidade, mas, embora fizesse grandes esforços, não consegui encontrar um processo que não se identificasse com um ou outro desses dois tipos. Desejo chamar-lhes a atenção para estes problemas. A sua análise exige alguma capacidade de ler fórmulas, mas aqueles que estiverem dispostos a dar-se ao trabalho de estudar estes problemas, julga-los-ão tão fascinantes quanto eu os julgo.

a) Os processos do primeiro tipo resultam em uma série de acontecimentos mutuamente exclusivos E_1, E_2, ... E_n. Se fôr dada uma certa combinação das condições iniciais, o resultado correspondente, digamos E_1, será necessariamente produzido. O grupo de todas as condições iniciais possiveis divide-se em um grande número de intervalos extremamente pequenos e a probabilidade de E_1 é proporcional à soma de todos os intervalos cujos elementos compreendem as condições iniciais que levam a E_1. O mesmo raciocinio se aplica a todos os outros resultados.

Cada uma destas probabilidades é a soma do mesmo número de termos, e a cada termo da probabilidade de E_1 corresponde um, e somente um, termo de cada uma das outras somas que diferem apenas ligeiramente dele. Isto é uma consequencia da continuidade da função que dá a relação entre as condições iniciais e E. Segue-se que as probabilidades dos resultados E_1, E_2, ... E_n são aproximadamente iguais.

O jogo da roleta e o lance do dado são os mais conhecidos representantes deste tipo. Praticamente todos os acontecimentos casuais a que se faz referencia na biologia e na psicologia caem neste grupo. O seu traço característico é que o grupo de uma função contínua se divide em um certo número de pequenos intervalos.

b) O ato de embaralhar as cartas é típico do segundo grupo. É sempre repetido várias vezes. Embaralhar uma só vez, altera a ordem em que as cartas se encontram, mas absolutamente não produz a probabilidade igual para todas as cartas, como se deseja. O ato de embaralhar uma só vez dá uma ordem que depende da ordem existente e a igualdade da distribuição só será atingida se esse processo fôr repetido um número suficiente de vezes.

Processos físicos dessa natureza correspondem ao movimento browneano das pequenas partículas e ao movimento das moléculas, tal como é postulado pela teoria cinética dos gases.

Existem tambem processos contínuos desse tipo, como por exemplo a mistura dos líquidos. Neste caso, um pequeno intervalo de tempo toma o lugar do ato de embaralhar uma só vez. O estado do líquido após um pequeno intervalo depende do estado em que se encontrava no início e uma mistura completa só é obtida após muitas repetições.

Em todos estes processos é atingido um estado que, sob certos aspectos, é independente das condições iniciais. Na física conhecem-se muitos processos desse tipo. Escolhemos o seguinte exemplo da teoria do calor. Diferentes partes de uma esfera de constituição física dada teem temperaturas diversas. Submetemo-la a um processo de resfriamento, colocando-a em um ambiente de temperatura constante. No fim, as temperaturas de todas as partes da esfera, bem como as do meio circundante, estarão iguais, dependendo somente da quantidade de calor presente, mas sem influencia da distribuição sobre a esfera. O estado inicial determina as fases intermediárias em que consiste o processo, mas o estado final depende somente da quantidade de calor presente.

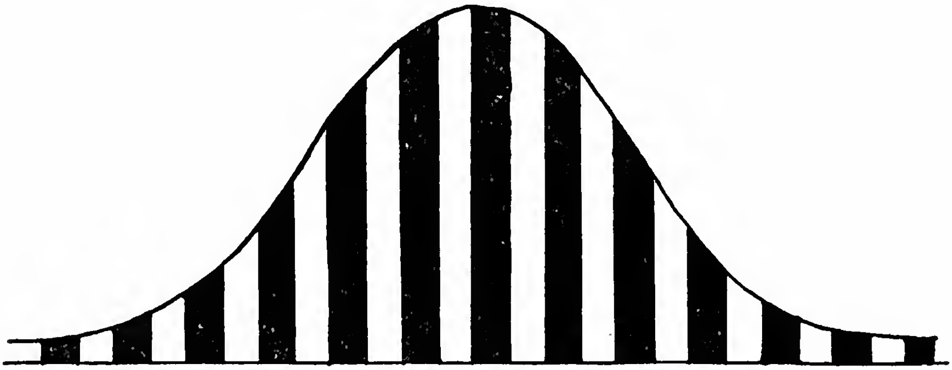

Fig. 1

2) **O jogo da roleta** — É conveniente iniciar as nossas considerações com o estudo de uma fórma simplificada desse jogo, inventada por Kries. Uma bola é posta em movimento por um impulso não muito pequeno, e é forçada a mover-se ao longo de um sulco pintado de listas vermelhas e pretas do mesmo tamanho. Observa-se a côr da lista sobre a qual a bola pára. Fazemos com que uma pessoa movimente a bola uma porção de vezes e registramos quantas vezes a bola parou em cada lista. O resultado pode ser observado na Fig. 1, na qual foi traçada uma curva lisa através dos pontos observados. A figura mostra que as probabilidades das listas individuais não são absolutamente iguais. As lis-

tas do centro teem maior probabilidade, enquanto que as das extremidades teem pouca.

Vejamos agora o que acontece se deixarmos de nos interessar pelas listas individuais e formarmos duas classes, uma de listas vermelhas e outra de listas pretas. A probabilidade de obter uma lista vermelha é dada pela soma das listas vermelhas individuais, que aparecem em branco na Fig. 1. As partes pretas da superficie correspondem à probabilidade de obter uma lista preta. Estas duas áreas não podem ser muito diferentes, pois são constituidas pelo mesmo número de partes. Se uma das áreas contiver uma lista a mais, esta deverá situar-se na extremidade da curva, onde o valor é muito pequeno. A probabilidade de qualquer lista vermelha difere pouco da que corresponde à lista preta contígua.

O jogo da roleta é obtido curvando o eixo OX dos nossos desenhos ao redor de um círculo, dividido em 37 partes iguais. Quando a roleta é mecanicamente perfeita, os números com que estão marcados os intervalos teem a mesma probabilidade. Dezoito desses números são pintados de vermelho, os outros dezoito de preto e somente o zero é branco. Se uma pessoa joga e não acerta, a banca recolhe a aposta, mas se a pessoa ganha, a banca paga um pouquinho menos que a quantia correspondente à probabilidade. A experiencia mostra que uma diferença ligeiramente inferior a 3% do valor correto é suficiente para garantir lucro à banca. Diz-se que foi Descartes quem inventou o jogo da roleta, mas não consegui averiguar essa afirmação.

A roleta é uma máquina de precisão e os casinos tomam o máximo cuidado para mante-la em perfeita ordem. Eles teem grande interesse em que os seus instrumentos deem probabilidades iguais a todos os números. Quando as possibilidades são diferentes, os jogadores podem nota-lo e causar prejuizo à banca jogando nas combinações em que entram os números favorecidos. Descobrir estes números exige paciencia e essa tarefa ainda se torna mais dificil em razão do costume adotado nos casinos de mudar as máquinas de uma mesa para outra. O objetivo dessa manobra é impedir o jogador de usar as informações que possa ter obtido na noite anterior. Todavia, a vigilancia dos banqueiros e a capacidade dos fabricantes de roletas teem limites. Por mais cuidado que estes tomem, o eixo da roleta não é perfeitamente centrado, as cavidades onde caem as bolas teem tamanhos levemente diferentes, a mesa não é perfeitamente horizontal e pequenos arranhões podem tornar a superficie mais áspera em certos pontos. As diferenças podem ser pequenas e escapar ao observador individual, mas vários jogadores pacientes trabalhando em cooperação, podem percebe-las e chegar a resultados muito desagradaveis para o banqueiro. É o que parece ter acontecido em Buenos Aires, algum tempo atrás. Eis a noticia do "Time", o conhecido semanário americano, de 12 de fevereiro de 1951.

O grande casino de Mar del Plata, de propriedade do governo, embora seja o maior do mundo, é tão vulneravel quanto qualquer outra casa de jogo diante do pequeno jogador que possua um sistema realmente eficaz. Na semana passada, Mar del Plata teve que chamar a policia para livra-la de 30 freguezes assíduos, que pareciam ter encontrado a terrivel fórmula para ganhar sempre. A complicação começou ha quatro anos atrás quando um jogador identificado apenas como Sr. Delgado, pôs-se a estudar os caprichos e o funcionamento das roletas no pequeno casino de Necocha, uma localidade próxima. Após registrar vários milhares de giros consecutivos de uma roleta, verificou que oito ou nove números pareciam sair mais frequentemente que os outros. Jogando em uma combinação desses números altamente frequentes e ratificando os seus cômputos, começou a ganhar modesta mas constantemente.

Em qualquer roleta pode surgir um pequeno desequilibrio ou uma aspereza imperceptivel que torna o atrito desigual quando gira. Isso favorecerá certos números e o jogador que descobrir esse defeito, poderá ganhar durante um curto período de tempo. Mas um casino bem dirigido verifica constantemente as suas roletas e muda-as de mesa para mesa exatamente para proteger-se contra essa fórma inocente de roubo. O que ha de extraordinário no caso do Sr. Delgado é que, apesar de todas as precauções normais, ele continuou ganhando, aparentemente em desafio às leis da percentagem e da média. Em 1948 estava tão seguro do seu sistema que começou a treinar quatro assistentes e mudou o seu campo de operações para Mar del Plata. Aí os discípulos logo deixaram o mestre para trás e formaram sindicatos proprios. A direção do casino, alarmada, alertou os "croupiers", ordenando-lhes que tomassem nota do número crescente de ganhadores permanentes. No ano passado as perdas causadas pelos novos sindicatos tornaram-se tão grandes que o diretor do casino foi demitido.

Mas isso não resolveu a complicação. O mais terrivel sindicato em Mar del Plata este ano contava com 20 membros, e os seus lucros foram avaliados em 6.000.000 de pesos. Era encabeçado por um antigo marinheiro alemão, apelidado El Alemán, que chegou à Argentina em 1939 quando o couraçado de bolso alemão Graf Spee foi posto a pique após a batalha do Rio da Prata. Entre os aproveitadores havia vendedores de frutas, garçons e sitiantes, que se puseram logo a comprar Cadillacs, Buicks e propriedades nas praias. Conhecidos somente por apelidos como El Crespo, El Vasquito ou Juancito, cada quadrilha operava com uma determinada roleta, que identificava por meio de minúsculos arranhões imperceptiveis para o observador desprevenido. Não tendo meios para impedi-los de ganhar, o casino escolheu a alternativa de impedi-los de jogar. Tomaram nota dos ganhadores constantes e uma bela noite foram estes presos pela policia, como jogadores profissionais. É dificil perceber como poderá ser fundamentada tal acusação, mas o fato é que desde esse dia não foram mais admitidos no casino.

Para nós o ponto importante é o seguinte: é extremamente dificil idear um processo que garanta a probabilidade de acontecimentos que pertencem ao tipo A. Para a ciência, felizmente, isto é um assunto de importancia mínima pois nesses casos o raciocínio parte, na maioria das vezes, das frequencias observadas para inferir a igualdade ou desigualdade das probabilidades.

3) **O ato de embaralhar as cartas.** — Em um jogo honesto, a sequencia das cartas deve ser entregue ao acaso. A interpretação habitual é que a sequencia das cartas não deve ser influenciada pela vontade de quem as dá ou qualquér outra pessoa, e que todos os jogadores devem estar em idêntico estado de ignorancia quanto à distribuição realmente existente. Essa é a finalidade das regras para embaralhar, cortar e dar as cartas. O ponto essencial é que as cartas devem ser cuidadosamente embaralhadas antes de serem dadas. No jogo de bridge, por exemplo, as cartas são dadas uma de cada vez a cada jogador, e assim se obtem mais uma mistura das cartas; mas as cartas dadas aos jogadores são evidente-

mente determinadas pela ordem resultante do ato de embaralhar. As regras são simples e garantem que nenhum jogador tem conhecimento das cartas dos outros. Isso é tudo que se pode esperar em um jogo no qual não se encara a possibilidade de trapaça. Mas o que nos interessa é saber se o ato de embaralhar pode resultar na falta de regularidade exigida pelo cálculo de probabilidade. Deixem-me dizer-lhes imediatamente que este problema tão trivial de embaralhar as cartas admite generalizações do mais alto interesse, como em breve verão.

Gauss passava as suas horas de lazer jogando gamão, mas mesmo enquanto se divertia não podia deixar de fazer observações. Após cada jogo anotava o número de azes que cada jogador tinha e manteve esses registros por muito tempo. Escreveu um pequeno artigo sobre "Os Azes no Whist", no qual mostrou que as suas observações concordavam perfeitamente com o ponto de vista de que o aparecimento de um az na mão de um jogador é um acontecimento casual no sentido do cálculo de probabilidade. Vamos deixar bem claro o que queremos dizer com isto. O ato de embaralhar, quando bem realizado, deve satisfazer as seguintes exigencias:

1) As probabilidades de qualquer carta estar em um certo ponto da ordem resultante do embaralhar devem ser as mesmas.

2) A probabilidade da ordem das cartas após serem embaralhadas deve ser independente da ordem inicial.

3) Após o ato de embaralhar, todas as ordenações possiveis das cartas devem ter a mesma probabilidade.

A maneira de embaralhar depende muito dos hábitos individuais do jogador. Consiste em determinados movimentos da mão, por meio dos quais a ordem das cartas é alterada. O resultado de um único desses movimentos depende da ordem existente das cartas, e nenhuma das tres exigencias é satisfeita. Tomemos por exemplo o que se chama "cortar as cartas". O baralho é dividido em duas partes aproximadamente iguais e as cartas de uma delas são enfiadas entre as da outra. Somente algumas das ordenações podem ser produzidas por um único ato de contar. As ordenações impossiveis teem a probabilidade igual a zero, enquanto que as outras teem probabilidades que dependem dos hábitos da pessoa que embaralha.

Aqui é o ponto de partida da análise matemática. Estabelece-se um sistema de equações às quais se aplica uma série de transformações, correspondendo cada uma a um ato de embaralhar. Demonstra-se que as três condições serão satisfeitas se o número de transformações fôr infinito. Aqui é que está a dificuldade. Em um jogo no qual se toma parte por divertimento, não se pode perder tempo embaralhando. Se o ato de embaralhar fôr repetido 6 ou 7 vezes, será o suficiente para esgotar a paciencia da maioria dos jogadores. A consequencia é que a mistura não é perfeita e o resultado depende da ordem inicial das cartas. Esta ordem é dada pela sequencia da mão anterior, em que os jogadores tinham que jogar segundo uma ordem estabelecida. Será possivel na observação real, seguir a pista desta influencia?

E. Culbertson, o perito em bridge, fez a si mesmo essa pergunta e convenceu seus amigos a ajuda-lo nesses observações. Os resultados desses esforços podem ser expressos nestas tres proposições: 1) as figuras distribuem-se igualmente nas quatro mãos; 2) vasas em que todos os jogadores jogam cartas do mesmo naipe ocorrem com maior frequencia do que a teoria nos leva a esperar; 3) séries de cartas do mesmo naipe de extensão média, isto é, até quatro cartas, ocorrem com a frequencia teórica, mas séries muito longas, de oito ou mais cartas, ocorrem com muito maior frequencia do que nos leva a esperar o cálculo de probabilidade. Mãos que conteem cartas de um só naipe ocorrem com uma frequencia muito superior à sua probabilidade teórica. O primeiro ponto concorda perfeitamente com a observação de Gauss, mas os outros dois mostram claramente uma divergencia entre a teoria e a experiencia. Os nossos esforços no sentido de estabelecer regras que garantam a casualidade dos acontecimentos, de certa fórma obteem êxito, mas a casualidade artificialmente produzida não é perfeita, tal como acontece com a roleta.

Felizmente não nos temos que preocupar com a casualidade nos casos realmente importantes. Uma das proposições fundamentais da teoria cinética dos gases pode ser provada por meio de uma análise idêntica à que se empregou no problema de embaralhar as cartas. As cartas de um baralho formam uma série linear e a posição de uma carta é determinada pelo número do lugar em que é encontrada. Aplicamos uma espécie de processo mecânico ao baralho, em virtude do qual as cartas são colocadas em uma outra disposição de maneira que existe, para cada carta, uma probabilidade de que terá um certo lugar na nova disposição. Podemos generalizar esta ideia e falar de um processo de mistura sempre que uma ordenação linear seja transformada em uma nova ordem por meio de um processo mecânico, de maneira que cada objeto tenha uma certa probabilidade de ser encontrado em um certo lugar. Algumas disposições de objetos no espaço bi ou tri-dimensional podem ser transformadas em uma ordem linear. A teoria cinética considera um gas como um agregado de moléculas encerradas em um vaso e supõe que todas as distribuições das moléculas nesse espaço são igualmente provaveis. Segue-se da livre mobilidade das moléculas que cada uma delas pode ser encontrada em qualquer parte particular do espaço. Significa ainda que qualquer configuração das moléculas é igualmente provavel. Podemos compreender esta proposição da seguinte fórma. Imaginamos que o vaso está dividido em cubos muito pequenos que colocamos em uma ordem linear. Esses cubos são numerados consecutivamente e a posição de uma molécula é dada pelo número do cubo onde se encontra o seu centro. Os cubos são de igual tamanho e tão pequenos que somente uma molécula pode caber em cada um deles. Assim as moléculas formam uma série linear, da mesma maneira que as cartas de um baralho. Existe apenas esta diferença: nem todos os lugares desta série estão ocupados, pois o número de moléculas, embora seja muito grande, é muito menór que o número de cubos em que dividimos o espaço do vaso.

A configuração das moléculas muda constantemente. Dada uma certa configuração, existe, para cada molécula, uma certa probabilidade de que, após um curto espaço de tempo, estará em qualquer lugar dado. Um grande número de posições é excluído, e as outras posições absolutamente não teem probabilidades iguais. Isto resulta em um sistema de equações, às quais se aplica uma série de transformações, série que, neste caso, é realmente infinita, porque cada transformação corresponde a um intervalo infinitesimal de tempo. A discussão do problema mostra que após um certo tempo: 1) todas as molécluas teem a mesma probabilidade de estar em dada parte do vaso; 2) todos os traços da configuração inicial se desvaneceram e 3) todas as configurações são igualmente provaveis.

A experiencia mostra que os gases e os líquidos tendem para um estado de estabilidade no qual todas as partículas são uniformemente distribuidas, e neste sentido a análise é correta. Não ha nada errado nas nossas deduções. Gostariamos de saber se a probabilidade igual dos casos poderia ser deduzida diretamente dos dados mecânicos. Poincaré estudou o processo de mistura nos líquidos sob condições muito gerais, mas não conseguiu encontrar uma solução geral. Já nos resignámos ao fato de que a natureza torna muito dificil a descoberta das suas leis, mas é decepcionante verificar que ela não nos permite nem ao menos ter certeza da casualidade dos acontecimentos.

CAPITULO VII

O CÁLCULO DE PROBABILIDADE E O TEOREMA DE BERNOULLI

1) **Definição.** — O cálculo de probabilidade é o sistema de proposições abstratas deduzidas, segundo as regras da lógica, da noção de probabilidade matemática. Sabe-se que a teoria das classes e a álgebra estão livres de contradições; assim, o seu uso no cálculo de probabilidade não pode levar a contradições, pois não se introduzem novas noções.

Os teoremas do cálculo de probabilidade são abstratos e a sua verdade lógica consiste no fato de serem coerentes com as suposições das quais se derivam. A existencia real de qualquer objeto ao qual se apliquem esses teoremas não é nem uma suposição, nem a finalidade das deduções. Nem o teorema de Bernoulli nem o de Poisson nos capacita a fazer uma afirmação relativa aos acontecimentos quando não dispomos de informações sobre eles. A experiencia deve constituir a base de qualquer afirmação que pretenda ser empiricamente verdadeira.

Todos os teoremas podem ser deduzidos de maneira inteiramente abstrata, mas essa não é a melhor maneira de ensinar o cálculo de probabilidade. Raramente um método lógicamente perfeito é o mais adequado para fins didáticos. Em um curso introdutório, não se deve pretender atingir absoluta generalidade e é melhor manter contacto com a experiencia. É hábito ilustrar os teoremas por meio de exemplos nos quais os acontecimentos são considerados como fortúitos por consenso unânime. Atirar um dado, tirar uma bola de uma urna ou uma carta de um baralho, atirar uma moeda, são exemplos favoritos de acontecimentos casuais. Os manuais publicados mais recentemente usam de exemplos extraidos da biologia e podemos esperar que exemplos dessa espécie serão usados mais frequentemente no futuro.

2) **O teorema da adição.** — Um processo deve resultar em um dos acontecimentos E_1, E_2, ... E_n, que são mutuamente exclusivos, de maneira que somente um deles pode verificar-se. As probabilidades desses acontecimentos são conhecidas e iguais a p_1, p_2,... p_n Queremos saber qual é a probabilidade de que E_1 ou E_2 aconteça. A resposta é dada pela soma $p_1 + p_2$. Esta regra pode ser generalizada, resultando no Teorema da Adição: A probabiidade de que um, dentre vários acontecimentos mutuamente exclusivos, se verifique é igual à soma das probabilidades individuais.

Uma rodada da roleta pode dar como resultado um dos números 0, 1, 2, ... 36. Qual é a probabilidade de que um dos números 1, 2, ... 12 seja obtido? Ha 37 casos possiveis, com a mesma probabilidade, igual a 1/37. Os casos favoraveis são os 12 números de 1 a 12 e a sua probabilidade é 12/37.

Consideremos um acontecimento E com a probabilidade p. Ha, em qualquer prova, exatamente dois casos possiveis em relação a E: ou E acontece, e este caso tem a probabilidade p, ou não acontece. Qual é esta última probabilidade? Designando-a pela letra q, argumentamos da seguinte maneira: Temos dois casos mutuamente exclusivos, dos quais um deve acontecer. Portanto temos $p + q = 1$, e daí se segue que $q = 1 — p$. Quando a probabilidade de um acontecimento é conhecida, encontra-se a probabilidade de que esse acontecimento não se dê subtraindo da unidade a probabilidade do acontecimento. Esta é a regra das probabilidade opostas.

O teorema da adição pode ser aplicado a problemas nos quais os acontecimentos E_1, E_2, ... E_3 não são mutuamente exclusivos, mas isto leva a uma fórmula mais complicada.

3) **O teorema da multiplicação.** — Os problemas que se resolvem por este teorema podem ser ilustrados pelo seguinte exemplo. Qual é a probabilidade de obter a soma 12 ao atirar dois dados? Isto significa que ambos os dados devem cair com o seis para cima. A probabilidade de obter um seis com um só dado é 1/6, e o teorema da multiplicação diz que a probabilidade de obter um seis em cada um dos dados é igual ao produto destas duas probabilidades ou 1/36.

O teorema da multiplicação refere-se a probabilidades compostas. O acontecimento cuja probabilidade é procurada, consiste em dois ou mais acontecimentos individuais cujas probabilidades são conhecidas. A resposta é dada pelo produto das probabilidades individuais. A fórmula é simples, mas é preciso ter o cuidado de atribuir a cada probabilidade individual o valor que realmente possue. Acontece muitas vezes que os acontecimentos não são independentes e então os cálculos se tornam complicados.

Ao ler a análise de um acontecimento composto, raramente se encontram dificuldades, excetuando as que se devem à manipulação das fórmulas. Facilmente compreenderemos que um acontecimento é composto por esta e por aquela fórma, se isso fôr explicado de maneira adequada. Estamos sujeitos a esquecer que muitas vezes é dificil reconhecer que um acontecimento é composto e não simples, como haviam pensado investigadores precedentes.

4) **O teorema de Bernoulli.** — O acontecimento fortúito E, que possue a probabilidade conhecida **p**, é observado várias vezes. Conservam-se constantes as condições, de maneira que **p** tambem é constante. Podemos ilustrar esse caso retirando bolas de uma urna, que contem bolas brancas e pretas em números determinados. A côr da bola retirada é anotada e a bola é devolvida à urna, de maneira que o conteudo desta é o mesmo cada vez que se retira uma bola. Tirar uma bola branca constitue o acontecimento E. Perguntamos em primeiro lugar: qual é o resultado mais provavel de uma série de observações s dessa espécie? A resposta é muito simples: o resultado mais provavel é que obtenhamos um número de bolas brancas igual a **sp**. O resultado mais provavel é encontrado multiplicando a probabilidade do acontecimento pelo número de observações. Deixem-me dizer que a prova é muito facil e não exige nada alem da aritmética mais elementar.

Em uma longa série de observações, o número de resultados possiveis é muito grande e a probabilidade de um resultado particular é proporcionalmente pequena. Muitos resultados diferem apenas ligeiramente de **sp** e as suas probabilidades são somente um pouco menores que a do resultado mais provavel. A predição do resultado realmente obtido é afetada por um erro e procuramos saber os limites do intervalo dentro do qual podemos esperar o resultado com uma dada probabilidade.

A resposta é um pouco decepcionante. Esta probabilidade é dada por uma certa integral, o que não significa grande coisa para as pessoas que não teem pendores matemáticos. Felizmente, dispomos de tabelas dos valores desta integral, tabelas essas que podem ser usadas como quaisquer outras, como a de logaritmos, por exemplo. Muitas pessoas teem apenas uma vaga ideia do que possa ser um logaritmo, mas isso não as impede de usar as táboas. Pensem da mesma forma na integral da probabilidade: é uma tabela na qual poderão verificar qual a probabilidade de que o resultado de s observações sobre o acontecimento casual E com a probabilidade p seja encontrado dentro de uma distancia dada a partir do valor mais provavel sp.

Afim de apresentar o conteudo essencial da resposta, precisamos conhecer a distinção entre frequencia absoluta e frequencia relativa. Se o acontecimento E fôr observado m vezes em s observações, dizemos que m é a frequencia absoluta e m/s a frequencia relativa de E.

O teorema de Bernoulli faz as seguintes afirmações:

1) Os limites dentro dos quais a frequencia **absoluta** do acontecimento casual E pode ser esperada com uma dada probabilidade, **aumentam** indefinidamente com o número de observações. Tomemos o número A; por maior que seja, podemos sempre indicar o número S de observações que justificará a espectativa de que a diferença entre o resultado mais provavel e o resultado obtido seja maior que A.

2) Os limites dentro dos quais a frequencia **relativa** do acontecimento casual E pode ser esperada com uma dada probabilidade, **diminuem** indefinidamente com o numero de observações. Tomemos qualquer número B; por menór que seja, podemos indicar o número S de observações que justifica a espectativa de que a diferença entre o resultado mais provavel e o resultado obtido seja **menór** que B. Isto é que justifica a nossa crença de que as predições baseadas na probabilidade são tanto mais fidedignas quanto mais longa fôr a série de observações a que se referem.

A proposição de que no fim das contas um acontecimento casual se dará em um número de casos proporcional à sua probabilidade é surpreendente mas, ao mesmo tempo, parece exprimir claramente o que todos sentimos vagamente. Sem recorrer a matemática de espécie alguma, formamos os nossos pontos de vista quanto ao carater dos acontecimentos casuais, e sentimo-nos decepcionados quando as coisas não seguem o curso esperado. As duas histórias que se seguem são exemplos típicos das reações em nós produzidas por essa decepção.

O jogo do "Passe-dix" é jogado com três dados e os jogadores apostam pró ou contra a possibilidade de que o resultado do lance seja maiór que dez. Esse jogo era muito popular no tempo de Galileu e houve algumas pessoas que estudaram assiduamente o seu resultado. Um desses senhores notou, com surpreza, que obtinha o resultado 11 com muito maiór frequencia que 12, embora, argumentava ele, o número 12 seja obtido como a soma de tres números menores ou iguais a 6 tantas vezes quantas se pode obter, pelo mesmo processo, o número 11. Galileu interessou-se pela questão e encontrou a resposta correta. As somas não teem a mesma probabilidade e, por exemplo, o lance 2, 4, 6 tem seis vezes a probabilidade do lance, 4, 4, 4. Uma das muitas glórias de Galileu foi ter sido um dos primeiros homens a resolver um problema de probabilidade matemática. Neste caso, a decepção de um jogador esclarecido resultou em uma tranquila investigação das razões pelas quais as suas espectativas, baseadas na probabilidade, não eram confirmadas. No exemplo que se segue, as reações do indivíduo logrado foram mais violentas.

O abade Galiani encontrou um dia um homem que se propôs conseguir 18 pontos com tres dados, isto é, tirar um seis em cada dado. A aposta foi aceita e prontamente ganha. Foi repetida tres, quatro, cinco vezes, até que o abade explodiu, com palavras absolutamente improprias na boca de um eclesiástico: "Maldição! Esses dados estão viciados" E realmente estavam. Uma série tão extraordinária de êxitos nos convence imediatamente que estamos lidando com uma fraude, mesmo que jamais tenhamos ouvido falar em Bernoulli e no seu teorema.

O jogador que apelou para Galileu porque havia observado 1080 vezes o lance 11, mas somente 1.000 vezes o lance 12, era um homem de aguda inteligencia, mas recusamo-nos a chama-lo predecessor de Bernoulli. Sentia, com certeza, que a probabilidade está ligada, de alguma maneira, à frequencia. É pouco provavel que esse sentimento seja inato em nós. Citámos acima dois eminentes advogados que negaram esta conexão, e temos mais um argumento no fato de que nenhum dos filósofos antigos e medievais faz referencia a ela, embora as especulações relativas ao acaso e à probabilidade fossem um dos seus tópicos favoritos de discussão.

O conteudo essencial do teorema foi formulado e provado por Bernoulli no seu trabalho póstumo: "Ars conjectandi". A fórmula para a probabilidade de que o resultado de uma série de observações seja encontrado dentro de certos limites, deve-se a Laplace. Os problemas matemáticos relacionados com esta fórmula são numerosos e para esboçar-lhes a historia seria necessário escrever um pequeno livro. Ha várias razões em virtude das quais, atualmente, a fórmula de Laplace é considerada como a melhór, e continuará ainda por algum tempo em uso. O principal argumento a favor desta fórmula é ser conveniente e util. Não é certo, todavia, que uma fórmula, a um só tempo mais conveniente e mais util, possa ser encontrada, ao passo que dificilmente se concebe que o raciocinio de Bernoulli possa vir a ser substituido por qualquer coisa melhor e mais convincente. É a apreciação correta desses fatos que nos leva a chamar o teorema pelo nome deste último e não pelo de Laplace.

5) **A inversão do teorema de Bernoulli.** — O acontecimento casual E, cuja probabilidade **p** é desconhecida foi observado em uma série de s experimentos, e verificou-se que o acontecimento E se deu **m** vezes. A melhor determinação da probabilidade desconhecida **p** é:

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{s}}$$

O teorema faz tambem uma afirmação sobre a probabilidade de que a nossa determinação seja afetada por um erro de certa magnitude. Os seguintes pontos são essenciais.

(a) Se um acontecimento casual E foi observado **m** vezes em uma série de s experimentos, a frequencia relativa de E é a melhor determinação da probabilidade desconhecida **p** de E.

(b) A determinação da probabilidade desconhecida **p** está sujeita a um erro, mas, aumentando o número s de observações, podemos tornar este erro tão pequeno quanto quisermos.

(c) Estas regras se aplicam ao caso em que as condições de E permanecem constantes.

Este último ponto é importante, pois em todos os casos práticos não podemos ter certeza da estabilidade das condições. Se retirarmos bolas de uma urna que contem bolas brancas e pretas em proporções dadas, temos certeza de que o conteudo permanece o mesmo. O grupo de condições constantes está diante de nós, diretamente tangivel e estaremos justificados ao aplicar a esses resultados o teorema de Bernoulli. Tomemos, por outro lado, as frequencias dos nascimentos de meninos e meninas, que, na maioria dos paises, aproxima-se de 104 : 100, o número de meninos excedendo ligeiramente o de meninas. As condições que determinam o sexo de uma criança são desconhecidas, e não podemos dizer com antecedencia que a probabilidade de nascer, digamos, uma criança do sexo masculino permanecerá constante. Temos que basear os nossos pontos de vista na observação da proporção entre os nascimentos de meninos e meninas em vários anos. Para esse fim calcula-se uma quantidade que é chamada o COEFICIENTE DE DIVERGENCIA. Quando este coeficiente se aproxima da unidade, o acontecimento observado depende de um grupo constante de condições, no mesmo sentido que no nosso exemplo de tirar bolas de uma urna. Quando não existe tal grupo de condições, o coeficiente de divergencia é maior que a unidade e falamos então de uma dispersão supernormal dos resultados.

São relativamente poucos os casos em que ficou provada a dispersão normal. A proporção acima mencionada entre nascimentos de meninos e de meninas é um deles. É plausivel que o grupo constante de condições que determinam o sexo de uma criança dependa, de alguma fórma, da constituição fisiológica do organismo humano. Igualmente não sabemos praticamente nada sobre essas condições. Uma das várias consequencias que podem ser inferidas deste fato é que não seremos capazes de influenciar essa proporção entre os nascimentos de crianças de cada sexo, a não ser que os nossos conhecimentos aumentem de maneira atualmente imprevisivel.

Outro exemplo de dispersão normal, com um coeficiente de divergencia próximo da unidade, pode ser encontrado nos experimentos psicológicos. Um sujeito compara dois estímulos ligeiramente diferentes, como por exemplo dois pesos, e exprime o seu julgamento pelas palavras: mais pesado, mais leve ou igual. Os julgamentos se referem à impressão obtida pela comparação dos estímulos. As condições devem ser conservadas constantes, e isso exige apurada técnica de experimentação, pois o sujeito deve permanecer em completa ignorancia relativamente aos julgamentos que já pronunciou sobre o mesmo par de estímulos. Nos experimentos desta espécie, os julgamentos se sucedem sem ordem alguma e apresentam o carater de acontecimentos casuais. Esta afirmação refere-se meramente à nossa incapacidade de prever que julgamento será expresso pelo sujeito em um determinado experimento.

Vou ilustrar o problema com os resultados de uma série de experimentos nos quais um peso de 100 grs. devia ser comparado com outro de 108 grs., em 9 séries de 50 experimentos cada uma. Ocultou-se do sujeito toda e qualquer informação relativa aos pesos e aos julgamentos expendidos em experimentos antecedentes. Apesar da diferença consideravel de 8 grs., os julgamentos do sujeito variaram e não houve uma única série na qual todos os julgamentos fossem corretos. São estes os números de julgamentos "mais pesado" obtidos em 9 séries de 50 experimentos cada uma: 47, 42, 45, 47, 42, 46, 45, 46, 47. As variações são consideraveis e devemos perguntar se são compativeis com o ponto de vista de que os julgamentos dependem de um grupo constante de condições. A resposta é dada pelo coeficiente de divergencia que neste caso é 0,96. Resultados semelhantes foram obtidos em todas as outras comparações de pesos.

Daí concluimos que o julgamento relativo à comparação de dois estímulos depende de um grupo de condições constantes, determinadas pela constituição psicofísica do sujeito. Usa-se, para designar esse grupo de condições, a palavra sensibilidade. Esta palavra é de facil compreensão e o seu significado científico não difere muito do comum. A diferença está em que procuramos determinar com exatidão a sensibilidade de uma pessoa, atribuindo-lhe, se possivel, um número. A importância prática deste problema pode ser compreendida por qualquer pessoa que já tenha tido qualquer dificuldade relativa à acuidade dos seus olhos, isto é, que seja míope ou présbita. O oculista que prescreve os óculos procede a alguns experimentos com os olhos, e é com base nesses experimentos que receita as lentes a serem usadas. O processo empregado pelo oculista é uma adaptação do chamado método das mínimas diferenças perceptiveis, às condições peculiares da sensibilidade do olho.

O problema do oculista é relativamente simples. Pretende apenas prescrever as lentes que corrigirão um determinado defeito da visão. A percepção sensorial não depende exclusivamente dos fatores fisiológicos, mas é influenciada tambem por fatores mentais tais como a atenção, a fadiga ou a interferencia de outros estímulos. Por meio de disposições experimentais adequadas, podemos eliminar ou conservar constantes a influencia de todos os fatores menos um e então observar de que fórma as variações desse fator influenciam o estado mental resultante. Este é o característico geral de toda experimentação psicológica, e todos os métodos experimentais e estatísticos teem a finalidade única de tornar compreensivel a influencia de vários fatores sobre os estados mentais. A situação da psicologia é favorecida pelo fato de que a maioria dos estados mentais, com exceção daqueles que tocam diretamente a personalidade, podem ser submetidos a variações sem que isso deixe qualquer traço permanente. Os srs. apreciarão melhor este ponto se lembrarem o que dissemos sobre a proporção de nascimentos de crianças dos dois sexos. Atualmente não dispomos de meio algum que permita prever a possibilidade de influenciar o sexo de um nascituro e, de qualquer fórma, experimentos desse tipo estão fóra de cogitação. Mas se tivessemos esses meios, empreender tais experimentos viria a constituir um sério problema moral.

6) **O teorema de Poisson** — Este teorema se refere ao caso em que o acontecimento casual E tem probabilidades diferentes em experimentos diferentes. Tomemos como exemplo o ato de retirar bolas de urnas diferentes. Suponhamos que temos 3 urnas, contendo a primeira 4 bolas brancas e 3 pretas; a segunda, 2 bolas brancas e 7 pretas; a terceira, 9 bolas brancas e 4 pretas. Retiramos 50 vezes uma bola da primeira urna, repondo sempre a bola depois de anotar-lhe a côr. Observações semelhantes são feitas em relação às outras duas urnas. A probabilidade de tirar uma bola branca da primeira urna é $\frac{4}{7}$, da segunda $\frac{2}{9}$, e da terceira $\frac{9}{13}$. O aparecimento de uma bola branca tem valores diferentes nas tres séries. O número de urnas pode ser aumentado indefinidamente sem alterar o carater do problema.

O teorema de Poisson diz que o resultado mais provavel é que o acontecimento E tenha uma frequencia igual ao produto do número de observações multiplicado pelo valor médio das suas probabilidades nas diferentes partes da série. No caso das probabilidades variaveis, o seu valor médio desempenha o mesmo papel que a probabilidade constante do acontecimento E no teorema de Bernoulli. Existe tambem uma fórmula pela qual podem ser determinados os limites dentro dos quais a frequencia realmente observada de E será encontrada com uma dada probabilidade. Assim, o teorema de Poisson é uma generalização do teorema de Bernoulli. Tendo em mente o fato de que estamos lidando com a média de probabilidades **conhecidas**, o conteudo essencial deste teorema pode ser exposto da seguinte fórma:

1) Os limites dentro dos quais a frequencia **absoluta** do acontecimento casual E pode ser esperada com dada probabilidade, **aumentam** indefinidamente com o número de observações.

2) Os limites dentro dos quais a frequencia **relativa** do acontecimento casual E pode ser esperada com dada probabilidade, **diminuem** indefinidamente com o número de observações.

Este teorema nos permite predizer o resultado quando as probabilidades de E nas diferentes séries são conhecidas. Existe tambem a inversão deste teorema e por ela podemos inferir, da frequencia observada do acontecimento E, a média desconhecida das probabilidades.

Esta inversão diz que a melhor determinação da média desconhecida das probabilidades do acontecimento casual E é dada pela frequencia relativa de E na série inteira. Aumentando o número de observações, podemos tornar o erro desta determinação tão pequeno quanto quizermos.

Poisson, que era discípulo de Laplace e viveu na primeira metade do século passado, provou o seu teorema por meio de uma análise mais ou menos complicada e que pode ser encontrada em muitos manuais sobre o cálculo de probabilidade. Alguns autores cometem o erro de provar primeiro o teorema de Bernoulli e então apresentar a demonstração do teorema de Poisson, tal como foi feita por este. Parece-me que devemos seguir uma destas duas alternativas: ou deduzimos primeiro o teorema de Poisson e obtemos depois o de Bernoulli como uma especialização, ou tomamos o caminho inverso, e provamos o teorema de Poisson como uma generalização. É importante compreender a estreita relação existente entre estes dois teoremas, pois ela se torna obscura quando são deduzidos independentemente.

Poisson denominou o seu teorema "la loi des grands nombres", a lei dos grandes números e atribuiu-lhe uma importancia algo exagerada. A utilidade desse teorema é limitada pelo fato de que as quantidades que determinamos são médias de outras probabilidades desconhecidas. Sem dúvida é preferivel tornar a base de experiencia tão grande quanto possivel, mas muitas vezes é mais instrutivo agrupar cuidadosamente os fatos do que simplesmente aduzir alguns fatos não analisados. A lei dos grandes números é citada com mais frequencia na linguagem diária que nos trabalhos científicos.

7) **O teorema de Bernoulli e a experiencia** — O teorema de Bernoulli nos capacita a responder à questão de saber se existem na experiencia real acontecimentos aos quais se apliquem as proposições do cálculo de probabilidade. Esta questão diz respeito à significação objetiva do cálculo de probabilidade. Uma única observação sobre o acontecimento casual E com a probabilidade **p** não pode servir de base para uma resposta, porque tanto E como E' podem ser observados, seja qual fôr o valor de **p**.

As condições são diferentes quando temos que lidar com uma série de observações, pois neste caso o teorema de Bernoulli declara até que ponto a frequencia relativa observada de E se aproxima do valor de **p**. Existem na natureza acontecimentos que concordam com este teorema? Os srs. observarão que esta questão implica em uma nova definição dos acontecimentos aos quais faz referencia o cálculo de probabilidade: acontecimentos casuais são aqueles aos quais se aplica o teorema de Bernoulli. Todos os outros atributos dos acontecimentos casuais são irrelevantes, principalmente a presença da ignorancia em relação à causalidade dos acontecimentos. Se o processo de seleção pelo qual os casos individuais são trazidos à nossa observação fôr uma realização do acaso lógico, o teorema de Bernoulli será válido e esta questão pode ser decidida quando se está de posse dos dados necessários.

Observamos a frequencia do acontecimento casual E, cuja probabilidade é conhecida e calculamos certas quantidades com base nos resultados observados. As mesmas quantidades são encontradas pelas nossas fórmulas e a concordancia entre os valores observados e os valores calculados prova a correção da suposição sobre a qual se baseiam essas fórmulas. Sempre que desejamos pôr à prova uma hipótese relativa a acontecimentos objetivos, procedemos da seguinte fórma: comparamos os resultados da observação com os dos nossos cálculos e vemos então no acôrdo ou desacôrdo, respectivamente, a confirmação ou refutação das nossas hipóteses.

As condições sob as quais o acontecimento E é observado devem ser constantes e a probabilidade p deve ser conhecida com exatidão. A última exigencia exclue os experimentos com moedas ou dados, pois as irregularidades na fórma e a falta de homogeneidade nos impedem de determinar as probabilidades de um certo dado ou de uma certa moeda. A loteria parece oferecer u mexemplo quasi perfeito da retirada ao acaso de uma bola de uma urna. Em razão dos interesses financeiros que envolvem, essas retiradas são feitas com grandes cuidados e sob fiscalização, de maneira que o seu carater casual fique tão garantido quanto possivel.

G. Th. Fechner, cujo nome é conhecido por todos os srs. como fundador da psicofísica, estudou os resultados da loteria na Saxonia, e encontrou uma concordancia satisfatória entre os resultados e os seus cálculos. A mesma concordancia foi encontrada por Czuber nas loterias de Praga e Bruenn. De um modo geral, podemos dizer que os resultados dos cálculos e das observações concordam em todos os casos em que o material é suficientemente grande e cuidadosamente coligido. Daí podemos tirar a conclusão de que na experiencia real se podem encontrar acontecimentos que possuem o carater fortúito exigido pelo cálculo de probabilidade.

O teorema de Bernoulli é de grande alcance, dada a sua importancia, mas não é uma lei natural, nem deve ser interpretado metafisicamente. É apenas uma proposição matemática e difere do famoso teorema de que duas vezes dois são quatro somente pelo grau de complexidade. Não devemos tambem acreditar que podemos aplica-lo sempre que a nossa ignorancia quanto à causalidade dos acontecimentos fôr completa. A aplicação deste teorema não se baseia na ignorancia, mas em informações definidas que justificam a suposição de que estamos tratando de um acontecimento casual de probabilidade constante. Precisamos firmar bem este ponto. Existe um argumento a favor da constancia das condições quando os acontecimentos dependem de um complexo que é diretamente dado e diretamente observavel, tal como acontece com o ato de retirar bolas de uma urna ou cartas de um baralho. Na maioria dos outros casos, teremos que nos satisfazer com a declaração negativa de que os experimentos foram cuidadosamente executados e de que não ha razões para supor que se tenha dado uma alteração das condições. A experiencia logo nos mostrará se a nossa suposição é certa ou errada.

O teorema de Bernoulli não dá certeza de que o resultado se situará dentro de determinados limites. Fala apenas de uma probabilidade. Aumentando o número de observações, podemos fazer com que essa probabilidade se aproxime tanto quanto quizermos da unidade, mas permanece sempre a possibilidade de que a nossa espectativa não se realize.

O teorema de Bernoulli não regula o curso dos acontecimentos, como uma lei da natureza. Não existe uma força misteriosa que obrigue os acontecimentos fortúitos a manter certas percentagens. Muita gente acredita que um acontecimento tem mais possibilidades de se dar quando deixa de acontecer por algum tempo. Na roleta, quando a mesma côr, o vermelho, por exemplo, sai algumas vezes sucessivamente, muitos jogadores apostam no preto, porque acreditam que esta côr tem mais possibilidade de dar, como consequencia das rodadas precedentes. Esta superstição é conhecida pelo nome de "maturidade das possibilidades" e serve de assunto para infindaveis discussões entre os frequentadores de casinos. Este ponto de vista está em franca contradição com o postulado do cálculo de probabilidade de que os lances são independentes entre si e que o resultado de um lance não é influenciado por coisa alguma que haja sucedido antes. Se o acontecimento casual E se verificou com uma frequencia menor que a esperada, o teorema de Bernoulli absolutamente não afirma que se dará com maior frequencia nas últimas partes da série.

Os jogadores podem tentar a sorte com a maturidade das possibilidades. Mais cedo ou mais tarde verificarão que esse método de apostar é tão bom quanto jogar no primeiro número que nos vem à mente. Parece que esse ponto de vista está, de certa fórma, relacionado com as noções populares sobre acaso e probabilidade, às quais me referi mais acima. É surpreendente, entretanto, que este ponto de vista seja compartilhado por pessoas que não deviam cometer tal erro. H. Bruns, um dos eminentes autores que escreveram sobre o cálculo de probabilidade, formulou-o como um axioma, que denominou "a exaustão igual dos casos", mas uma ideia não se torna mais convincente por ter sido apresentada como uma fórmula. A ideia da exaustão igual dos casos contem um elemento de verdade, tanto que suspeitamos que alguma coisa deve estar errada nos nossos cálculos quando as frequencias observadas diferem muito das que esperamos. Uma noção estreitamente ligada à exaustão igual dos casos é a "casualidade da natureza", apresentada por alguns autores ingleses. Nenhum deles, entre tanto, deu-se ao trabalho de definir precisamente a casualidade da natureza, como fez Bruns com a sua exaustão igual dos casos, e asim é dificil perceber o que realmente querem dizer com isso.

8) **Amostragem representativa** — Suponhamos que esteja à venda uma certa quantidade de trigo e que queiramos saber o preço que corresponde à sua qualidade. Evidentemente é imposivel examinar todo o lote, e assim baseamos o nosso julgamento em amostras tiradas de partes diferentes. Consideramos a qualidade do trigo da amostra como representativa de todo o lote e estamos prontos a pagar o preço correspondente. Que queremos dizer quando afirmamos que a amostra é representativa do lote todo e em que condições se justifica essa suposição?

Consideremos uma classe C que contem n elementos e está dividida em duas sub-classes C_1 e C_2, que são mutuamente exclusivas de maneira que cada elemento de C tenha que pertencer quer a C_1 quer a C_2. O número de elementos de C_1 é **m** e o de C_2 é **n-m**. Tomamos ao acaso s elementos de C e verificamos que **t** desses elementos pertencem a C_1 e **s-t** elementos pertencem a C_2. Tal grupo é chamado uma **amostra ao acaso.**

Falamos de uma **amostra representativa** da classe de que é tirada quando a proporção de elementos pertencentes à sub-classe C_1 tanto na amostra como na classe C é igual ou aproximadamente igual. Em outras palavras: as diferenças entre as frequencias relativas $\frac{m}{\ }$ e $\frac{t}{s}$ devem ser suficientemente pequenas. Três fatores entram no problema.

O primeiro é a probabilidade com que podemos esperar que a amostra realmente seja representativa da classe. Desejamos que isso se aproxime tanto quanto possivel da certeza.

O segundo é o grau de diferença entre as frequencias relativas $\frac{m}{n}$ e $\frac{t}{s}$ que estamos dispostos a tolerar. Este ponto é frequentemente decidido com base em razões práticas.

O terceiro ponto diz respeito ao número s de elementos que a amostra contem. Este número não deve ser nem muito pequeno nem muito grande. Se fôr pequeno demais, a amostra poderá não ser representativa, e se fôr muito grande, as dificuldades em coligir e examinar a amostra serão consideraveis.

A relação entre esses fatores é dada pelo teorema de Bernoulli: quando dois destes fatores são dados, é possivel calcular o terceiro. Em muitos casos, estaremos interessados no tamanho da amostra, o que significa quantos elementos de C teremos que coligir afim de conseguir uma amostra representativa. Em outros casos queremos saber qual é a probabilidade de que uma amostra de um dado tamanho seja representativa de toda a classe, o que significa que o segundo e o terceiro fatores são dados e P deve ser encontrado.

Esta definição de amostragem pode ser aplicada tambem ao caso em que a classe C tem um número qualquer de sub-classes C_1, C_2, C_3, ... Uma amostra tirada de C será representativa da classe toda se as frequencias relativas dos elementos pertencentes às sub-classes C_1, C_2, C_3 ... forem as mesmas ou aproximadamente as mesmas na classe C e na amostra.

A teoria da amostragem é uma das partes mais fascinantes do cálculo de probabilidade. É de importancia relevante na biologia e na psicologia. Para decidir se uma amostra é realmente representativa do grupo do qual foi tirada, é preciso possuir íntimo conhecimento dos fatos a serem investigados. O valor de um teste de inteligencia aplicado a um grupo de escolares de São Paulo depende inteiramente de saber se o grupo é representativo das crianças desta cidade. Somente uma pessoa que possua conhecimento íntimo dessas crianças pode formular um julgamento quanto a esse ponto.

Muitos investigadores usam indistintamente os termos amostra ao acaso e amostra representativa. Em certo sentido isso é correto, pois não nos será possivel obter uma amostra representativa se arbitrariamente aceitarmos alguns elementos e rejeitarmos outros. Devemos formular as regras para coligir as amostras e segui-las rigorosamente. Se aceitarmos todos os elementos de C que se apresentarem, teremos certeza de que a escolha da amostra possue o carater de acaso subjetivo, mas isso nem sempre basta. Frequentemente acontece que as nossas normas de seleção favorecem uma ou outra sub-classe e então a nossa amostra não tem a mesma constituição que o grupo que pretende representar. Creio que os problemas teóricos da biologia e da psicologia são tão urgentes e importantes quanto qualquer problema prático da indústria e do comércio. A prova de que a nossa teoria da amostragem não é meramente uma especulação vazia de sentido, tornar-se-á mais convincente se lhe demonstrarmos o valor prático. No primeiro exemplo, o valor monetário da amostragem correta é demonstrado pela economia anual de milhões de cruzeiros.

Consideremos os artigos produzidos em série, tais como as partes de um telefone. É preciso usar de grande cuidado na manufatura dos transmisores de carbono. Uma grande fábrica produz cerca de dois milhões desses transmissores por ano. É evidentemente impossivel passar cada um deles por uma prova completa de laboratório. É igualmente pouco prático tornar o processo de fabricação tão exata que todos os transmissores sejam perfeitos. O custo seria proibitivo e os freguezes se negariam a comprar. Se, por outro lado, fosse vendido um número excessivo de transmissores defeituosos, o prejuizo da companhia seria desproporcionadamente grande. Seria um nunca acabar de reclamações dos freguezes sobre a má qualidade dos transmissores. A maneira de resolver essa dificuldade é examinar uma pequena parte da produção — uma amostra — e verificar qual a percentagem de transmissores defeituosos. Se as provas forem aplicadas a uma amostra representativa, podemos ter certeza de que a produção total será de idêntica qualidade.

O exemplo seguinte podia ter sido tirado de um romance policial. O sr. Locard, diretor do laboratório de pesquisas da policia de Lyon, França, teve que prestar auxilio em uma investigação contra alguns indivíduos acusados de fabricar moeda falsa. Ele retirou a poeira existente nas roupas desses homens por meio de um poderoso aspirador e submeteu-a a uma analise química. Verificou-se que a poeira continha estanho, antimônio e chumbo nas mesmas proporções que as moedas de cuja fabricação haviam sido acusados. Neste caso, o fato de que uma amostra tem a mesma constituição que uma classe dada, é considerado como prova da origem comum da amostra e da classe. Os tres metais depositaram-se nas roupas dos acusados na ocasião em que trabalhavam na fabricação de moedas e é dificil imaginar qualquer outra explicação.

O tamanho da amostra é determinado pelo teorema de Bernoulli. A exigencia de que o tamanho da amostra seja consideravel não significa que a amostra deva ser consideravel em comparação com a classe de que foi tirada. Muitas das classes com que lidamos na biologia e na psicologia são infinitas, e nenhum exemplo finito, seja qual fôr o seu tamanho, será consideravel quando comparado com uma classe infinita. As palavras "suficientemente grande" devem ser tomadas no seu estrito sentido teórico.

Quando uma amóstra não apresenta a constituição que esperamos, concluimos que o processo de seleção não foi uma coleta ao acaso, ou que inadvertidamente tiramos a amóstra de outra classe. Podemos tambem expôr o caso desta maneira: o nosso raciocínio está correto, mas as condições realmente existentes não correspondem às suposições em que se baseia o nosso raciocinio matemático. É assim que se raciocina em todos os casos dessa espécie, desde a raiva de Galiani ao verificar que estava sendo logrado no jogo dos dados até o argumento de Cournot, de que o nosso conhecimento das leis da natureza se baseia na observação da coexistencia e sucessão de acontecimentos que não podem ser explicados pelo acaso.

É importante que se familiarizem com este raciocinio, que é usado em todos os casos em que se empregam os métodos estatísticos e que merece a nossa especial atenção. Todos conhecem, através de experiencias mais ou menos agradaveis, as táboas de logaritmos.

Uma dessas táboas dá os logaritmos da função trigonométrica tangente. Ha duas maneiras de computar esses números. A primeira consiste no chamado método direto, que dá muito trabalho, ao passo que o segundo método consiste em encontrar a diferença entre os logaritmos do seno e do co-seno, o que exige apenas uma subtração. Pode-se demonstrar que os valores encontrados por este último método, em um quarto dos casos não são corretos em relação à última casa decimal.

Os valores que figuram na táboa são uma amóstra da classe infinita de todos os valores. Existe uma linda coleção de táboas dessa espécie, conhecida por "Thesaurus logarithmorum completus", de Vega. Examinando a táboa da tangente, verifica-se que jamais existe diferença entre esses valores e a diferença entre os logaritmos do seno e do co-seno. A conclusão, evidentemente, é que esses valores não foram computados pelo método exato, mas sim pelo processo menos trabalhoso.

É importante compreender o papel desempenhado pelo cálculo de probabilidade neste caso, porque é um caso típico. Começamos por tirar conclusões quanto à frequencia que um acontecimento deve apresentar, se certas suposições forem corretas. Quando a observação corrobora o resultado, tomamos esse fato com uma confirmação das nossas suposições e usamo-las com maior confiança. Uma falta de acôrdo entre os cálculos e a observação indica que as condições realmente existentes diferem de uma maneira ou de outra, daquelas sobre as quais baseamos os nossos cálculos. A matemática nos leva até esse ponto, mas não vai adiante. Um ponto de vista relativo à natureza desta diferença deve ser baseado em um conhecimento íntimo do caso em apreço. Neste caso, o desejo de evitar um longo trabalho é facil de compreender e dificilmente se poderá duvidar da correção da nossa interpretação.

Encontrar uma explicação para a falta de acôrdo entre os cálculos e as observações não é problema que possa ser resolvido pela matemática. No caso em apreço, constitue um pequeno problema de psicologia individual, pois compreendemos imediatamente que essa ligeira diferença entre os valores encontrados pelcs dois métodos, pode escapar à observação e que o autor de boa vontade escolheu o método que lhe pouparia tanto trabalho. Acreditamos compreender como trabalhou a mente do autor e compreendemos a razão do erro. No-tem bem a diferença existente entre este caso e o do livro de Ahmes, onde tínhamos que lidar com erros semelhantes. Não temos conhecimento suficiente da maneira pela qual trabalhava a mente do antigo egípcio que escreveu esse livro e não podemos formar um ponto de vista quanto à origem dos erros.

9) **As táboas de Tippet para coleta de amostras ao acaso.** — Algumas das fórmulas usadas na estatística são apenas aproximadas; quanto a outras, sabe-se que são corretas para séries infinitas de observações, mas o seu emprego nas séries finitas — e são as únicas de que dispomos — dá muito trabalho. No primeiro caso, desejamos conseguir informações quanto ao grau de aproximação alcançado nas nossas observações e no segundo desejamos saber que extensão deverão ter as nossas séries de observações, para que sejam consideradas satisfatórias. Não nos sendo possivel determinar o valor de tal fórmula por meio do raciocinio abstrato, temos que submete-la à prova da experiencia, aplicando-a a uma amóstra cuja constituição seja conhecida, e a respeito da qual possamos ter certeza de que é uma amostra ao acaso. Tal experiencia nunca pode ter o valor de uma demonstração abstrata, mas desde que é o único meio que nos resta, temos que aceita-lo. Por essa razão é importante ter uma série de dados dentre os quais possamos tirar, sem grande esforço, uma amostra ao acaso com a constitiução que se desejar.

É dificil obter a casualidade por meio de aparelhos mecânicos. A experiencia do casino de Mar del Plata prova que grandes gastos, tanto em dinheiro como em proficiencia mecânica, não garantem a casualidade. Nenhum experimentador poderia fazer despesas semelhantes; alem disso, os experimentos necessários são, para não dizer mais, uma dura prova para a paciencia. Afim de evitar essas dificuldades, L. H. C. Tippett elaborou uma coleção de números de quatro algarismos, escolhendo os números individuais do "Census Report". As táboas constam de 26 páginas e são muito úteis para o estatístico.

Vou relatar-lhes as minhas experiencias pessoais com essas táboas, porque isso me dará uma oportunidade de explicar o raciocínio que se emprega em casos semelhantes. A minha experiencia mostra também que em assuntos tão complicados não se deve confiar muito nas primeiras impressões. Uma rápida inspeção de algumas partes da tabela deu-me a impressão de que o algarismo 8 era favorecido e ocorria com frequencia maior que a esperada. Isto me levou a examinar a frequencia de todos os algarismos e contei quantas vezes cada um dos algarismos 0, 1, 2, . . . 9 ocorria nos primeiros 200 grupos de 160 números, em que se divide a táboa.

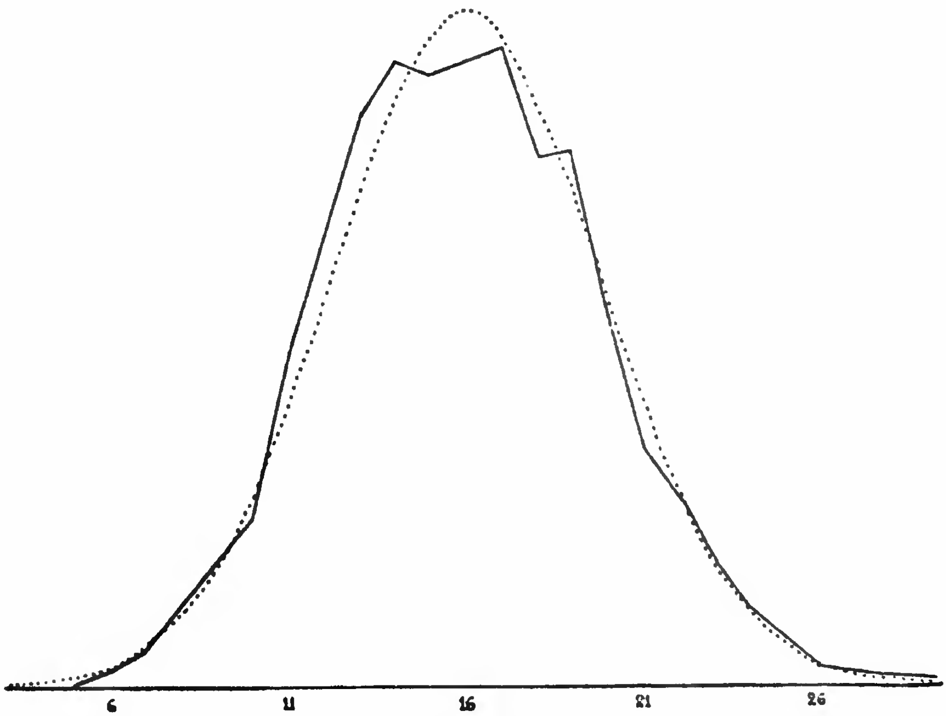

FIG. 2

O resultado mais provavel é que qualquer algarismo apareça em um desses grupos de 160 números 16 vezes. As frequencias reais dos algarismos diferem amplamente, e os valores observados vão de 6 a 29. As probabilidades dos resultados diminuem rapidamente quando a distancia entre o resultado mais provavel, ou seja, 16, aumenta. A Fig. 2 nos dá uma representação gráfica dos resultados. Os valores das frequencias de 6 a 29 são dados na abcissa e a ordenada dá o número de vezes que cada resultado foi observado. Os pontos obtidos por essa fórma foram unidos por linhas retas. A curva lisa indica quais deveriam ser essas frequencias de acôrdo com os cálculos feitos segundo a nossa fórmula.

Ao examinar a Fig. 2, a primeira impressão é de que a curva teórica se adapta perfeitamente aos dados. Para julgar gráficos desta espécie é preciso desenvolver uma atitude de espírito especial mixto de crítica e de resignação. Uma adaptação satisfatória a todos os respeitos é uma rara exceção. O curso irregular das linhas que ligam os valores mais altos no centro da figura é um defeito conspícuo, mas não sério. As probabilidades dos resultados que se situam nas vizinhanças do resultado mais provavel não diferem muito, e não é de surpreender que a curva seja irregular. É muito mais sério o fato de que, à esquerda do resultado mais provavel, grande parte da curva teórica esteja abaixo dos valores observados, enquanto que à direita acontece o oposto. A matemática do teorema de Bernoulli nos permite prever essa assimetria, e assim podemos dizer que, de um modo geral, esta parte da nossa inspeção demonstrou existir acôrdo satisfatório entre os cálculos e a observação.

O passo seguinte consiste em computar as frequencias observadas. Eis aqui os resultados:

0	16,255	5	15,940
1	15,805	6	15,595
2	16,225	7	15,740
3	16,325	8	15,890
4	16,080	9	16,140

Aqui, novamente, a primeira impressão é favoravel. As frequencias observadas aglomeram-se densamente ao redór do valor mais provavel e situam-se todas dentro de um intervalo cuja amplitude é 0,730; alem disso, o valor mais provavel se encontra muito próximo do centro desse intervalo. Uma inspeção mais rigorosa mostra que os primeiros algarismos de 0 a 4 são decididamente favorecidos em detrimento dos últimos. E é interessante notar que a frequencia do algarismo 8, que suspeitávamos ser excessivamente grande, mostrou ser menor que o valor mais provavel e situou-se entre as menores frequencias encontradas.

O último passo consiste em comparar os valores observados de algumas quantidades com os obtidos por meio de cálculos, sob a suposição de que o aparecimento de um certo algarismo é um acontecimento casual de probabilidade 0,1. Ha várias quantidades dessa espécie à nossa disposição; escolhemos os chamados desvio médio e desvio padrão. Sem entrar nos detalhes do processo de definir e calcular essas quantidades, apresento aqui os resultados:

	Observado	Calculado
Desvio medio:	3,057	3,028
Desvio padrão:	3,816	3,795

A diferença entre os valores calculados e observados é menos que 1% e não deixa dúvida quanto ao alto grau de concordancia entre os resultados.

A diferença entre as frequencias dos primeiros e dos últimos algarismos poderia ter sido evitada se Tippett tivesse extraido os seus dados não de uma estatística relativa à população, mas de uma outra compilação de números, como por exemplo, as táboas de logaritmos. As frequencias dos números 0 a 9 na décima casa, por exemplo, diferem apenas ligeiramente de 0,1 e os dados delas extraidos constituiriam material ainda mais perfeito para uma coleta ao acaso.

10) Uso das tabelas de Tippett na Psicofisica — O problema fundamental da psicofísica será facilmente compreendido por qualquer pessoa que tenha passado por um exame da vista. O oculista submete o seu cliente a certos experimentos e depois receita os óculos que, com surpreza dos não iniciados, geralmente são satisfatórios. A acuidade visual é medida com base no tamanho das menores letras que o cliente é capaz de ler a uma certa distancia, em condições padronizadas. A relação entre a acuidade visual, determinada por essa fórma, e o grau das lentes destinadas a corrigir um determinado defeito de visão é uma questão de experiencia. O processo experimental é uma adaptação do chamado método da mínima diferença perceptivel ao problema particular dos defeitos da visão.

A sensibilidade dos outros sentidos pode ser medida da mesma fórma.

Ha outros processos, conhecidos tecnicamente como métodos psicofísicos, que servem também para medir a acuidade sensorial. Alguns deles são cômodos e podem ser organizados em uma rotina, que resiste à prova da experiencia, como no caso do método das mínimas diferenças perceptiveis, nas mãos do oculista. Outros processos são mais complicados, mas parecem prometer resultados mais seguros. É dificil decidir quanto aos méritos e demeritos desses métodos, pois a coleta do material experimental necessário exige grande dispendio de energia e tempo.

O psicólogo, ao investigar um problema relativo à precisão da percepção sensorial, tem à sua disposição diversos métodos, entre os quais, pode escolher. É quasi um lugar comum dizer que deverá nesse caso, escolher o processo que garanta os melhores resultados com um mínimo de trabalho. Mas essa solução ideal quasi nunca existe. A obtenção dos melhores resultados geralmente exige uma extraordinária quantidade de trabalho, ao passo que um resultado mais ou menos duvidoso pode ser obtido com pequeno esforço. Assim, vê-se o investigador diante de um problema que, afinal, se reduz a um caso de conciencia. Decidir quanto ao valor relativo de diversos métodos psicofísicos não é facil; Forrest E. Lindner propõe-se o problema de resolver essa questão relativamente a quatro processos. A sua técnica baseia-se nas tabelas de Tippett e o seu raciocinio é o seguinte:

Quando um estímulo de pequena intensidade é apresentado a um orgão sensorial, o sujeito algumas vezes percebe a estimulação, outras vezes deixa de percebe-la, sem que seja possivel prever o resultado de um experimento particular. Este é o característico formal de um acontecimento casual, e podemos supor que, sob condições bem definidas, existe uma probabilidade constante de que um estímulo de dada intensidade será percebido pelo sujeito. Quanto mais intenso o estímulo, maior a probabilidade de que seja percebido. Essa probabilidade difere de pessoa para pessoa e depende do estado dos orgãos sensoriais e da constituição psicofísica do sujeito. Para os estímulos intensos, essa probabilidade se aproxima da unidade, o que significa que é quasi certo que o estímulo será percebido.

A maneira pela qual essas probabilidades mudam conforme a intensidade do estímulo é característica do individuo cuja sensibilidade desejamos determinar. Linder imagina um sujeito cuja sensibilidade seja exatamente conhecida, e usa as tabelas de Tippett para encontrar os resultados que apresentarão certas observações relativas a esses acontecimentos casuais. Lindner selecionou 6 estímulos com intervalos iguais: —2,00, —1,20, —0,40, +0,40, +1,20, +2,00. As probabilidades de que essa pessoa imaginaria perceba esses estímulos são 0,0228, 0,1151, 0,3446, 0,6554, 0,8849, 0,9772. Esses resultados serão provavelmente obtidos se fizermos 50 experimentos com cada um desses estímulos.

No trabalho prático, essas probabilidades são desconhecidas e teem que ser determinadas experimentalmente. As observações necessárias para isso duram varios meses e, além disso, é dificil conservar constantes as condições. A Tabela de Números Colhidos ao Acaso, de Tippett, nos permite coligir, com pouco trabalho, uma série de dados isentos da suspeita de que as condições tenham mudado, e ao mesmo tempo nos possibilita encontrar as probabilidades que procuramos. Consideremos o estímulo —2,00, para o qual a probabilidade de ser percebido é 0,0228. Tomamos amostra, colhida ao acaso, de 50 números e verificamos quantos dentre eles são menores que 0,0228. Este número, dividido por 50 constitue uma determinação empírica da probabilidade. As probabilidades dos outros estímulos podem ser determinadas da mesma maneira.

Determinações da mesma probabilidade baseadas em diferentes séries de números de Tippett apresentam variações, mas estas são devidas exclusivamente ao acaso. São as variações casuais que o teorema de Bernouilli nos leva a esperar e não subsiste suspeita alguma de que as condições possam ter variado em qualquer dos seus aspectos. Esta é a vantagem do processo de Lindner sobre o método de execução real dos experimentos. Coligir os dados necessários, que devem ser numerosos, exige muito tempo e permanece sempre a suspeita de que as condições experimentais possam ter mudado. É relativamente facil controlar as condições objetivas, mas as condições subjetivas — as que dependem da constituição psicofísica do sujeito — estão sujeitas a influencias perturbadoras dificeis de avaliar. Podemos citar como exemplo a influencia da prática progressiva. A sua influencia pode ser evidenciada, mesmo quando o sujeito foi submetido a uma longa série de treinos, e, em um certo sentido, podemos dizer que a prática nunca atinge seu estágio definitivo. A prática apresenta rápidos progressos no inicio, mas esses progressos tornam-se cada vez mais lentos, até que se atinge um estagio em que a sua influencia é tão pequena que pode ser negligenciada na maioria dos casos práticos. É a este estagio mais ou menos estacionário que se referem os investigadores quando falam em prática completa.

Os dados coligidos da maneira indicada por Lindner constituem o melhor material para comparar as vantagens e desvantagens dos diferentes métodos psicofísicos. Não é possivel entrar aqui nos pormenores das análises de Lindner, mas queremos citar apenas o fato de que, em resultado das suas investigações, conseguiu estabelecer um processo que dá boas esperanças de mostrar-se util sob determinadas condições.

11) **A equação decimal** — A peculiaridade dos problemas agrupados sob este título ficará melhor explicada se examinarmos uma investigação psicológica que realizei com grandes grupos de alunos, em colaboração com o meu amigo, Prof. R. M. Yerkes. Pedia-se aos sujeitos que avaliassem em segundos a duração de um intervalo de tempo que ia de cerca de 1/4 de minuto a um minuto e meio. O inicio e o fim dos intervalos eram marcados por sinais acústicos e pedia-se expressamente aos sujeitos que dessem o resultado em segundos. Foram avisados, naturalmente, de que não deviam usar nenhum meio auxiliar para medir o tempo, como por exemplo contar as batidas do coração. Os sujeitos sabiam que a finalidade do experimento era investigar o sentido do tempo e não ha dúvida de que procuraram conformar-se com as nossas instruções.

Os resultados mostraram que os números 0 e 5 ocorriam com muita frequencia e uma investigação mais detalhada provou que as estimativas de 1/4, 1/2 e 3/4 de minuto, bem como de um minuto, excediam em frequencia todas as outras. A explicação é que os sujeitos não avaliavam o tempo em segundos, como haviamos pedido, mas usavam o intervalo de minuto, com que estamos mais familiarizados. Os srs. observarão que a argumentação, neste caso, corresponde exatamente à apresentada por Gauss ao provar que certas irregularidades existentes na táboa de logaritmos de Vega são devidos ao desejo de poupar trabalho. O ponto de partida é o fato de que as observações não concordam com a nossa espectativa baseada na probabilidade. A matemática nos leva somente até esse ponto, mas encontrar uma explicação nada tem absolutamente que ver com a matemática.

Em um grande grupo de dados compilados de maneira inteiramente mecânica, todos os algarismos de 0 a 9 teem mais ou menos a mesma frequencia. Quando a constituição psicofísica do homem entra em jogo, as frequencias dos algarismos diferem e esse fato é chamado **equação decimal.** Se pedirmos a uma pessoa que diga números ao acaso — isto é, o primeiro número que lhe vem à mente — logo verificaremos que existe uma predileção por certos números. A equação decimal é diferente em campos diversos e em alguns casos podemos explica-la, ao passo que em outros nenhuma explicação é encontrada. Examinaremos dois casos em que a explicação apresenta consideravel interesse psicológico.

Muitas são as ocasiões em que temos de responder a uma pergunta relativa à nossa idade. Uma delas é o recenseamento, no qual as autoridades fazem essa pergunta, porque a distribuição das idades é um aspecto importante para o estudo da população de um país.

Dar uma resposta verídica a essa pergunta dificilmente pode ter qualquer consequencia desagradavel, exceto para as poucas pessoas que temem que seus caros amigos venham a descobrir-lhes a idade verdadeira. Ao responder a essa pergunta, não notamos uma preferencia consciente por este ou aquele número. Todos os adultos sabem a propria idade e assim seria de esperar que os resultados do recenseamento fossem bastante exatos quanto a esse ponto. Entretanto, não é isso o que acontece. Entra em ação uma influencia qualquer que leva as pessoas a preferir os números que terminam em zero ou, com menor frequencia, com cinco. Quanto mais baixo o nivel cultural da população, mais forte é essa influencia. Levou algum tempo antes que os estatísticos descobrissem a existencia dessa equação decimal e encontrassem um meio de evita-la. O remedio é muito simples: não se deve perguntar a idade, mas sim a data do nascimento. Nos recenseamentos obtidos por essa fórma não se encontra a equação decimal.

Não dispomos de meios para estudar a distribuição das idades nas populações desaparecidas da terra ha muito tempo. Mas o curioso é que podemos provar que certos dados, velhos de centenas de anos, indicam uma equação decimal semelhante à encontrada nos dados referentes à nossa época. A maioria dos dados relativos às idades das pessoas está fadada a desaparecer dentro de pouco tempo, mas existe um grupo de dados que perdura por um tempo muito longo, quasi ilimitado: as inscrições tumulares. Possuimos uma notavel coleção de inscrições latinas — o Corpus Inscriptionum Latinarum — que pretende dar uma relação completa de todas as inscrições latinas. Entre elas estão as inscrições tumulares, a maioria das quais dá a idade do morto. As idades mencionadas nas pedras tumulares encontradas na Italia foram colecionadas e os dados mostram uma predileção por certos algarismos, predileção essa quasi igual à que observamos nos recenseamentos contemporâneos.

A seguinte tabelazinha expõe os fatos referentes à equação decimal nos dados relativos à idade das pessoas. Os dados russos referem-se ao recenseamento de 1897. Os dados americanos referem-se ao Recenseamento dos Estados Unidos de 1880. Os dados dos estados de Michigan e Alabama foram elaborados separadamente, mas deram exatamente a mesma ordem de preferencia pelos algarismos. Os números estão dispostos em ordem decrescente de preferencia, de maneira que o número de frequencia maior aparece primeiro e o de frequencia menor vem em ultimo lugar.

Ordem	Odessa	Alabama Michigan	Estados Unidos	Túmulos romanos
I	0	0	0	0
II	5	5	5	5
III	2	8	8	8
IV	9	2	2	2
V	8	9	9	3
VI	3	3	6	7
VII	6	6	3	6
VIII	4	4	4	4
IX	7	7	7	9
X	1	1	1	1

As posições dos algarismos 0, 5, 4 e 1 são as mesmas em todas as colunas. Nas colunas correspondentes a Alabama-Michigan e Estados Unidos, somente a ordem dos algarismos 3 e 6 muda. Os dados desta tabela não deixam dúvida quanto à afirmação de que a idade das pessoas sofre uma influencia cujo carater geral permanece praticamente inalterado através do tempo. A equação decimal encontrada para os Estados Unidos difere menos da encontrada nos dados dos túmulos romanos que da de Odessa. O carater dessa influencia pode ser descrito pela seguinte fórma:

O algarismo zero tem a maior frequencia, provavelmente devido à tendencia a arredondar a idade. O mesmo motivo resulta na preferencia pelo algarismo 5. Os algarismos contíguos aos mais favorecidos apresentam a tendencia de aparecer com baixas frequencias. Isto explica cabalmente os dados encontrados nas pedras tumulares romanas, onde os algarismos 1, 9, 4 e 6 ocupam os últimos lugares. A discussão dos dados contemporâneos não é tão facil. A maior diferença entre os dados russos e americanos consiste no fato de que o algarismo 8 é deslocado do terceiro para o quinto lugar.

Voltemo-nos agora para o estudo da equação decimal nas observações astronómicas sobre o movimento das estrelas. O campo de visão do telescópio, sobre o qual a estrela se move, é dividido por fios paralelos e o astrónomo tem que observar o momento em que a estrela cruza o fio central. Ele olha para o relogio, anota a hora até os segundos e começa a contar as batidas dos segundos, sempre olhando para a estrela que está cruzando o campo. Anota mentalmente a posição da estrela no segundo exatamente anterior ao momento em que ela cruza o fio central, e nota tambem a sua posição no segundo que segue o cruzamento do fio. Faz uma estimativa da posição do fio entre esses dois lugares, em décimos de segundo, e esta fração é somada à hora marcada pela batida do relogio antes que a estrela cruzasse o fio. Este é o chamado método "do olho e ouvido" de Bradley. O processo mental implicado nessas estimativas é evidentemente complexo e exige uma boa dose de prática antes que alguem se possa julgar um bom observador.

A duração do intervalo de tempo varia entre 0,0 e 1,0 segundo. Mesmo observadores muito experimentados cometem erros que se patenteiam nas frequencias desiguais dos números nas estimativas. Esta equação decimal é diferente para observadores diversos e não se consegue melhorar a qualidade da observação pelo fato de informar o observador da sua predileção por certos algarismos. É fóra de dúvida que esta equação decimal não é produzida por uma peculiaridade dos instrumentos, e nem o observador tem consciencia da sua predileção por este ou aquele algarismo. Isto sugere que essas irregularidades são devidas à constituição psicofísica do observador.

Há dois grupos de experimentos psicofísicos que teem relação direta com este problema. O primeiro é o chamado "experimento de complicação", que trata da interferencia de estímulos óticos e acústicos. O sujeito senta-se em frente de um grande mostrador, cuja circunferencia está dividida por pequenas linhas em intervalos iguais. A última linha de cada dezena é um pouco mais longa e traz o número respectivo. Sobre esse mostrador move-se um ponteiro com velocidade constante. Esse ponteiro é acionado por um mecanismo de relogio, de maneira que a sua velocidade pode ser alterada à vontade. Em determinado momento, faz-se ouvir um som rápido e agudo, e o sujeito tem que marcar o ponto em que estava o ponteiro quando o som se fez ouvir.

O ponto do mostrador em que o som é percebido raramente coincide com o momento em que o estímulo realmente é produzido. Essas diferenças são determinadas pela direção da atenção, e cada marca distintiva da divisão do mostrador age como uma incitação a localizar o som nesse ponto. Mesmo quando as linhas do mostrador são todas do mesmo comprimento e separadas por intervalos relativamente grandes, é muito raro que o som seja localizado nos intervalos.

Os fios do telescópio desempenham o mesmo papel que as linhas sobre o mostrador, e devem influenciar as estimativas de maneira semelhante. A sua influencia será menos pronunciada, uma vez que a velocidade com que a estrela se move através do campo de visão é menor que a do ponteiro do mostrador, mas temos razão para esperar que a batida do relogio seja localizada com mais frequencia sobre um dos fios e, particularmente, sobre o fio crítico colocado no centro do campo de visão. Isto significa que a estimativa zero terá uma frequencia superior a 0,1. A atração exercida pelos fios do telescópio foi observada pelos astrónomos que a denominaram: "aderencia da estrela ao fio".

O segundo ponto que devemos tomar em consideração é o conjunto de informações obtido nos experimentos relativos ao sentido do tempo. Muitos investigadores estudaram a nossa percepção de pequenos intervalos de tempo e verificaram que as nossas estimativas são mais seguras para intervalos de cerca de 0,6 a 0,7 de segundo. Os intervalos menores são superestimados e os maiores subestimados. Esses fatos foram estabelecidos com base em experimentos realizados com numerosos sujeitos e podemos admitir que a análise dos dados astronómicos daria resultados semelhantes. A tabela que apresentamos se baseia em varios milhares de observações feitas por um astrónomo muito experimentado. A primeira coluna dá as frequencias dos décimos de segundo correspondentes, e pode-se ver imediatamente que diferem consideravelmente do valor esperado 0,100. Nota-se tambem que nestes dados o algarismo 5 não é favorecido. A segunda coluna dá o intervalo que, em média, corresponde à estimativa. Vemos, por exemplo, que a estimativa 0,4 corresponde a um intervalo de 0,452 de segundo. Estes números resultam de cálculos muito fáceis, em cujos detalhes não pretendo entrar aqui.

	Frequencia	Intervalo
0,0	0,192	0,000
0,1	0,052	0,122
0,2	0,125	0,211
0,3	0,125	0,336
0,4	0,109	0,452
0,5	0,081	0,540
0,6	0,044	0,611
0,7	0,052	0,659
0,8	0,144	0,757
0,9	0,075	0,866

A tabela mostra claramente a superestimativa dos intervalos pequenos e a subestimativa a partir de 0,7. O processo pelo qual este astrónomo estimou os intervalos de tempo está evidentemente de acôrdo com as normas que regem a nossa percepção do tempo.

12) **O "Gallup Poll" e a medida da opinião publica.** — Parece-me mais conveniente não traduzir as palavras "Gallup Poll" até que se encontre um correspondente adequado para esse termo técnico. A expressão "Gallup Poll" ("Inquérito Gallup") quando traduzida na realidade é um processo destinado a averiguar o que pensa o povo de uma nação. Para o "pollster" entusiástico, a opinião pública é sempre importante, quer se refira aos méritos das diversas marcas de dentifrícios, quer à política externa do país. As informações relativas ao primeiro ponto são importantes para o homem que pretenda vender dentifricio e um estadista que de-

seje dirigir a política de acôrdo com os desejos do povo, precisa saber o que pensam os seus concidadãos. Abrahão Lincoln disse: "O que desejo fazer é aquilo que o povo quer que se faça e o problema para mim é como descobrir isso com exatidão". Mr. Gallup afirma que pode conseguir essas informações sem que seja necessário levar cada cidadão à urna para depositar o seu voto.

O seu método e a sua maneira de proceder podem ser rapidamente compreendidos por qualquer pessoa que tenha apanhado o sentido do teorema de Bernoulli. Consiste simplesmente em arranjar uma amostra representativa de toda a população e colher as suas opiniões por meio de perguntas selecionadas de maneira adequada e referentes aos tópicos do dia. Mr. Gallup tem um corpo de auxiliares que conta cerca de 300 pessoas treinadas para esse trabalho e espalhadas por todo o territorio dos Estados Unidos. Entrevistam 3.000 pessoas e as respostas que obteem são consideradas como representativas das opiniões de toda a nação, no dia em que são dadas. O que é verdadeiro em relação a toda a população deve ser verdadeiro em relação à amostra e vice-versa. Eis o argumento de Mr. Gallup. Suponhamos que haja em um barríl 7.000 feijões brancos e 3.000 feijões pretos bem misturados. Se retirarmos um punhado contendo 100 grãos, teremos na mão aproximadamente 70 feijões brancos e 30 feijões pretos e a amplitude do erro provavel pode ser computada matematicamente. Se o barríl contiver muitos grãos mais que o punhado, a proporção ficará dentro dessa margem de erro 997 vezes em mil. O inverso é igualmente verdadeiro: uma proporção de 7 para 3 na mão significa uma proporção de 7 para 3 no barríl.

Este principio é obviamente correto e não pretendo desperdiçar com ele uma única palavra. A teoria é simples, mas a tarefa de encontrar uma amostra representativa apresenta algumas dificuldades, que registramos nos quatro itens seguintes.

a) Os pontos de vista de um indivíduo dependem muito das suas condições sociais, políticas e económicas. Mr. Gallup extraiu os dados necessários das estatísticas do recenseamento, de relatorios do governo e das suas proprias investigações. Ele fala livremente sobre as informações assim obtidas, mas provavelmente guarda para si alguns fatos importantes, o que é um direito seu pois, afinal de contas, trabalha para o seu negocio e não para a ciência.

b) Amostras de 3.000 pessoas são suficientes quando as pessoas são escolhidas de acôrdo com as informações indicadas no item a. O número de pessoas a serem entrevistadas em um determinado ponto do país depende da densidade da população, que atinge o máximo na zona nordeste dos Estados Unidos. Essas pessoas proveem das seguintes sub-divisões:

i) Rural — Urbana: Pessoas que vivem em cidades de mais de 100.000 habitantes, cidades entre 100.000 e 10.000 habitantes, cidades de menos de 10.000 habitantes, em sítios.

ii) Educacional: Escola primária ou nenhuma escola, escola secundária, escola superior.

iii) Econômia: Pobre ou recebendo auxilio do governo, mediana (operários qualificados), empregados de escritórios, pequenos comerciantes, acima da media, sitiantes.

iv) Idade: 21 a 29 anos, 30 a 49 anos, de 50 anos para cima.

v) Política: Democratas, republicanos, independentes.

As percentagens de todos os subgrupos enumerados nos itens **i** a **v** são conhecidas e o número de pessoas que deve constituir a amostra deve ser escolhido de acôrdo com essas percentagens. Por exemplo: os democratas, republicanos e independentes estão na seguinte proporção: 11,5 : 10,8 : 8 relativamente à população total, e a amostra deve ser constituida da mesma maneira.

c) É preciso ter certeza de que a amostra é realmente representativa. Esse problema não admite uma solução exata, como foi explicado nas aulas anteriores.

d) Uma afirmação relativa à opinião pública pode ser correta hoje, mas não tem que ser necessariamente verdadeira daqui a quinze dias. O fato de negligenciar este ponto motivou o fracasso de Mr. Gallup ao prever o resultado da última eleição presidencial em 1948. Todos os partidos procuram influenciar a opinião pública antes de uma eleição, por meio de campanhas planejadas com maior ou menor maestria. Em um país onde dois partidos quasi se equilibram, o resultado é fortemente influenciado pelo eleitor independente que, livre de laços partidários, dá o seu voto ao homem que lhe parece merece-lo. O barríl contem feijões pretos e brancos em uma proporção ligeiramente diferente da unidade, mas durante a campanha eleitoral são adicionados feijões brancos e pretos em quantidades desconhecidas. Quando a campanha é habilmente dirigida e o inquérito é feito várias semanas antes da eleição, os novos feijões podem alterar completamente a situação. Foi essa a desagradavel experiencia pela qual passou Mr. Gallup na eleição de Mr. Truman. Parece que ele ficou tão impressionado pela tendencia inequívoca revelada pelos primeiros inquéritos, que pôs de lado a possibilidade de uma mudança, embora alguns fatos que chegaram ao conhecimento dos "pollsters" indicassem claramente que a opinião pública se estava voltando para Mr. Truman. Esse fracasso não só prejudicou a reputação de Mr. Gallup mas tambem, segundo eu soube, o seu negocio.

A organização de um inquérito exige não só conhecimento íntimo do país, mas tambem experiencia, pois é pouco provavel que a primeira tentativa obtenha êxito. Mr. Gallup teve a grande sorte de encontrar colaboradores competentes, e as instruções que lhes dá sobre a fórma de escolher as pessoas a serem entrevistadas são suficientes para conseguir uma amostra representativa, contanto que sejam executadas conscienciosamente. O êxito do inquérito depende dos assistentes que se encarregam das entrevistas. Devem possuir uma aptidão natural para conversar com as pessoas e teem que seguir uma técnica que lhes é ensinada. A abordagem aconselhada é a seguinte sentença: "Eu gostaria de conhecer a sua opinião sobre alguns assuntos que são atualmente de grande interesse". Em alguns inquéritos as pessoas são abordadas na rua, e nesse caso o "pollster" precisa ter verdadeiro "faro" para distinguir quais os homens e as mulheres que estarão dispostos a parar para responder. É norma evitar as pessoas apressadas ou cheias de pacotes. Pessoas que ficam esperando nas lavanderias automáticas, nos Estados Unidos, estão sempre dispostas a conversar para passar o tempo. Aqui em S. Paulo, as sapatarias "relâmpago", onde concertam os sapatos enquanto os fregueses esperam, oferecem oportunidades semelhantes para entrevistas dessa natureza. Nem todos possuem a habilidade de fazer os outros falarem, e não resta dúvida de que, dos trezentos e poucos auxiliares de Mr. Gallup espalhados por todo o territorio dos Estados Unidos, nem todos possuem no mesmo grau esse dom.

Já se disse que nenhum inquérito é melhor que os seus entrevistadores. O trabalho destes é mais exaustivo do que se pensa e a tentação de fugir a ele é grande. Alguns homens e mulheres sentem relutancia em visitar os bairros pobres de uma cidade grande e entrevistar pessoas capazes de responder às perguntas com insultos. A desculpa de que a pessoa a ser entrevistada não estava em casa é uma fórma facil de escapar ao trabalho e dificil de ser comprovada. Muitas vezes a resposta constitue, por si mesma, um problema. Um homem, entrevistado pela primeira vez na vida, sente-se importante e as suas respostas mostram antes o que ele acredita que deve pensar em vez do que realmente pensa. Algumas pessoas acham dificil exprimir suas opiniões. Parece mais conveniente preparar, para cada pergunta, uma série de respostas que esgotem todas as possibilidades, de maneira que baste ao entrevistado indicar qual lhe parece melhor.

O fracasso na previsão da vitoria de Truman em 1948 depõe com veemencia contra os "pollsters". Esse malogro foi espetacular e constituiu um pesado golpe contra o negocio do inquérito, pois este é um negocio e continuará a sê-lo. Gallup tem, em Elmo Roper e Archibald Crossley, dois fortes rivais, sem falar em outros menores, que existem em todos os pontos do país. Há uma viva rivalidade entre esses tres homens e em 1936 Roper marcou um tento importante quando previu, com 1 % de aproximação, a votação de Roosevelt, enquanto que tanto Gallup como Crossley cometeram um erro de 7 %. O simples fato de que as estimativas de dois "pollsters" possam diferir em 6 ou 8 % prova que os inquéritos, por enquanto, não constituem uma ciencia exata. Se eles realmente tirassem punhados de feijões do mesmo barríl, a diferença não poderia ser tão grande. O que aconteceu foi o seguinte: tiraram as duas amostras de dois barris que pareciam perfeitamente iguais, mas continham feijões brancos e pretos em proporções diferentes. Nos 12 anos que medearam entre 1936 e 1948, Gallup predisse os resultados de 196 eleições e o erro na estimativa da votação popular nunca excedeu 4 %. Para sermos justos com os seus rivais, devemos dizer que Roper, bem como Crossley, obtiveram êxitos semelhantes e algumas vezes aproximaram-se mais da verdade que Gallup. Daí concluimos que aferir a opinião pública não é um segredo pessoal de Mr. Gallup, mas uma coisa que pode ser aprendida, contanto que se tenham a prática e o dinheiro necessários.

Os principios do inquérito Gallup podem ser facilmente compreendidos, mas a sua aplicação prática exige uma organização que colha os dados necessários, e isto implica no desembolso de somas consideraveis, como veremos imediatamente. As despesas são grandes e as perspectivas de lucro monetário são incertas, de maneira que mesmo um homem muito rico poderia hesitar em iniciar um inquérito. Mr. Gallup começou do nada, pois seu pai perdeu tudo que tinha em negocios infelizes. Como foi possivel a um rapaz praticamente sem vintem organizar uma empresa cuja despesa anual sobe a 750.000 dólares? A história é interessante, pois mostra a única maneira pela qual uma pessoa interessada em medir a opinião pública poderia iniciar esse trabalho em outro país. Os dados foram tirados do "Time", número de 3 de maio de 1948.

Gallup nasceu no Meio Oeste em 1901 e estudou na Universidade Estadual de Iowa. Como era pobre, teve que trabalhar para custear seus estudos superiores. Tornou-se editor do jornal da universidade "The Daily Iowan" e por causa desse trabalho veio a interessar-se pela questão de saber por que as pessoas leem certos artigos — e quais são e quantos são os artigos realmente lidos. Terminado o curso, permaneceu na Universidade, fazendo curso post-graduado de psicologia.

Começou o seu primeiro experimento em materia de inquéritos percorrendo as ruas da cidade de Iowa com uma pasta cheia de jornais. Quando encontrava um homem disposto a conversar, puxava um jornal e perguntava ao seu interlocutor exatamente o que lhe agradava ou desagradava no jornal. Verificou que a maioria das pessoas preferia historietas cómicas à política ou às pretenciosas noticias da primeira página e histórias de interesse humano às noticias em geral. Isto lhe deu material para sua tese de doutoramento, que, por sua vez, lhe proporcionou um lugar de professor na Universidade de Drake e uma oportunidade de realizar inquéritos entre os leitores, para vários jornais. Obteve êxito nesse trabalho e os jornais que lhe seguiram as sugestões viram aumentar o número de assinantes. Em resultado Gallup foi convidado a dirigir o departamento de pesquisas de uma firma de publicidade de Nova Iorque. Tornou-se então perito em averiguar quem lia certos tipos de anuncios de dentifricios e por que razão o fazia, e um belo dia fez a si mesmo a pergunta: "Se a minha técnica dá resultado com os dentifricios, por que não dará com a política?"

Após tres anos de prática Gallup adquiriu a certeza de que inquéritos sobre dentifricios e sobre política eram uma e a mesma coisa. As suas atividades começaram a expandir-se constantemente e o "Gallup Poll" desenvolveu-se até formar uma rêde que inclue onze paises estrangeiros, inclusive o Brasil. Outros pesquisadores de Gallup investigam os efeitos dos anuncios ou estudam argumentos e elencos cinematográficos para os produtores de Hollywood. Podem predizer quasi com exatidão as receitas de uma fita ou o sucesso de estrelas radiofônicas. Somente para o "Gallup Poll" Gallup emprega 1.200 auxiliares de tempo parcial. As suas despezas anuais sobem a 750.000 dólares, e esta soma tem que ser ganha antes que se possa registrar qualquer lucro. É importante não perder de vista o aspecto financeiro da questão, bem como o fato de que Gallup nunca teria tido oportunidade de iniciar o "Poll" se não fosse a sua proficiencia como perito em publicidade. A partir de 1936, Gallup vem marcando um tento atrás de outro e a eleição de Truman em 1948 foi o primeiro fracasso real. Esse fracasso constituiu um verdadeiro choque para o público americano, que se tinha habituado a ver em Gallup uma espécie de Pítia moderna que possuia o dom de prever o futuro e grandes firmas cortaram relações comerciais com Gallup. Os seus rivais se encarregaram de fazer com que o público tivesse pleno conhecimento desse fracasso. Resta a ver se o público será capaz de encontrar o meio termo entre a confiança e a desconfiança excessivas.

O "Gallup Poll" é um exemplo das aplicações práticas do teorema de Bernoulli. Deixo aos srs. a tarefa de especular quanto ao valor do "Gallup Poll" como fonte de informações para o governo. Um governo democrático deve dirigir o país de acôrdo com os desejos do povo e isto evidentemente exige que o chefe de estado saiba o que deseja o povo. O teorema de Bernoulli nos mostra que podemos conseguir essas informações, contanto que as procuremos de maneira correta. Não promete, entretanto, levar-nos mais longe. Não diz se devemos agir de acôrdo com as informações obtidas ou adiar a ação para uma ocasião mais conveniente. E muito menos nos diz se o estadista tem o direito de opôr o seu proprio julgamento aos desejos dos seus concidadãos. Ha somente mais um ponto sobre o qual desejo tocar rapidamente.

O argumento mais frequentemente apresentado contra os inquéritos políticos de Gallup é que a publicação dos resultados constitue uma propaganda do candidato favorito. Muita gente gosta de ficar do lado de quem ganha. A campanha eleitoral que terminou com o vitoria do Presidente Truman prova claramente que o êxito no "Gallup Poll" não constitue um ponto decisivo na propaganda. Em maio de 1948 somente 36% dos eleitores dos Estados Unidos aprovavam a atuação do Presidente Truman, ao passo que Harold Stassen era mais cotado que Tom Dewey como candidato do partido republicano. A noticia da precariedade da posição de Truman aumentou a confiança dos adversários republicanos e, correspondentemente, levou os democratas a duvida da vitoria do seu candidato. O resto pertence à historia. Foi Mr. Dewey e não Mr. Stassen, quem se tornou lider republicano e Mr. Truman saiu vitorioso em uma luta que, no primeiro semestre, parecia perdida. Os acontecimentos provaram que o valor da propaganda do "Gallup Poll" não é suficiente para decidir o resultado de uma campanha eleitoral.

CAPITULO VIII

ESTATÍSTICA

1) Origem da Estatística — Tanto a palavra "estatística" como a ciência desse nome, são relativamente novas. Parece que foi Achenwall, um autor alemão que publicou seus trabalhos mais ou menos em meados do seculo XVIII, o primeiro a usar a palavra "estatística" para designar o estudo dos recursos e da população dos estados. Estes dados são evidentemente importantes para os governantes em qualquer época, e não é de admirar que se encontrem muitas referências a reis ou príncipes que se esforçaram para obter informações precisas sobre os negocios de estado. A referência mais antiga é encontrada na Bíblia, que menciona em dois pontos que o rei David procedeu a um recenseamento da população do seu reino. A arte de escriturar as despezas e recursos do governo era conhecida e praticada pelos romanos, mas perdeu-se quando da queda do seu império. Os estadistas de Florença e Veneza compreendiam a importancia de possuir informações fidedignas sobre a situação material do país e tomavam enérgicas providências para conseguí-las. Essas informações serviam exclusivamente para fins práticos e eram tratadas como segredos de estado, como se pode depreender do seguinte episódio: quando Mocenigo, doge de Veneza, jazia no seu leito de morte, em 1423, reuniu alguns dos cidadãos mais influentes e fez-lhes uma exposição sobre os recursos da cidade. Ele havia guardado consigo essas informações e não queria que, com sua morte, se perdessem.

A estatística continuou, por muito tempo, como a ciência dos negocios do estado. Os governantes sentiam a necessidade de possuir informações relativas às condições materiais dos respectivos paises e organizavam departamentos aos quais eram confiadas essas investigações. Na França, por exemplo, foi fundado, no século XVIII, um "bureau de statistique et commerce", que foi transformado, durante a revolução, em "bureau de statistique". Esta alteração do nome indica claramente que as atividades desse departamento eram gerais e não meramente limitadas aos movimentos do comércio. Não resta dúvida de que o rápido progresso da estatística como ciência dos negocios do estado se deve principalmente à predileção de Napoleão pelas informações precisas e fidedignas.

Os Estados Unidos e os paises Escandinavos procederam aos seus primeiros recenseamentos em 1801. Todos os paises civilizados seguiram esse exemplo e promulgaram leis tornando obrigatória a realização de recenseamentos com intervalos regulares. Hoje consideramos o estudo da população como um dos problemas mais importantes da estatística. Na administração das cidades, registrar diariamente o número de mortes, o sexo e a idade dos falecidos, é uma questão de rotina, e parece natural que esses dados sejam publicados com intervalos mais ou menos longos. Os primórdios desse ramo de estudos são curiosos.

2) **As observações de Graunt sobre a mortalidade** — As primeiras observações relativas à mortalidade foram feitas na Inglaterra e é interesante esboçar a historia desse trabalho, porque mostra a dificuldade que se encontra na coleta dos dados estatísticos. Registrar o número de nascimentos e mortes exige uma complicada maquinária oficial que, para ser eficiente, não pode deixar de ser dispendiosa. Ao chegar ao fim de uma investigação, muitas vezes nos sentimos decepcionados, pois os dados coligidos não fornecem informações sobre um ou mais pontos importantes. O desejo de melhorar os dados leva à invenção de novos e melhores métodos.

Nas irrupções de peste, verificadas nos séculos XV e XVI, procurou-se contar o número de mortes afim de dar uma ideia da violência da moléstia. A partir de 1593, começaram a ser publicadas em Londres, com intervalos irregulares, listas das pessoas falecidas e de 1603 para cá, possuimos registros semanais do número de mortes verificadas nessa cidade. Mas ninguem sabia o que fazer com essas listas. Serviam como assunto de conversa ou, quando muito, para sugerir aos ricos que seria conveniente abandonar a cidade, pois o rápido aumento do número de mortes indicava a irrupção de uma epidemia.

Era impossivel, antes dessa época, coligir na Inglaterra os dados indispensaveis ao estudo da população.

Existiam, desde 1583, os registros das paróquias, mas consignavam somente os batismos (não os nascimentos) dos membros da Igreja Anglicana exclusivamente, de maneira que as crianças que morriam antes de serem batizadas, bem como todas as que pertenciam a outros credos, não eram mencionadas. Somente em 1773 é que foi recomendado a todos os centros religiosos públicos — incluindo todos os credos — que registrassem todos os batizados, casamentos e enterros. Estes últimos assentamentos deviam declarar o sexo da pessoa falecida, e especificar se era criança, solteiro, casado ou viuvo. Note-se a ausência da categoria dos "divorciados". Isto significou sem dúvida um passo à frente, embora a falta de informações relativas à idade do morto torne esses registros inuteis para várias finalidades, como por exemplo os calculos relacionados com os seguros de vida.

Em 1664, John Graunt publicou o seu tratado: "Observações Naturais e Politicas sobre as Listas de Mortalidade", que representou a primeira tentativa no sentido de descrever numericamente a mortalidade. Eis aqui a tabela em que apresenta os seus dados:

De 100 pessoas que nascem, morrem nos primeiros

seis anos	36
nos dez anos seguintes	24
" " " "	15
" " " "	9
" " " "	6
" " " "	4
" " " "	3
" " " "	2
" " " "	1

Segue-se que das 100 pessoas às quais se referem essas observações, permanecerão vivas no fim de

6 anos	64
16 anos	40
26 anos	25
36 anos	16
46 anos	10
56 anos	6
66 anos	3
76 anos	1
86 anos	0

As tabelas de mortalidade, usadas hoje como base para os seguros de vida, dão esses dados para cada um dos anos de vida, mas conteem, essencialmente, as mesmas informações. De fato, pode-se computar o premio correspondente ao seguro de uma pessoa de qualquer idade. Esse aspecto prático despertou o interesse por esta descoberta; sugeriu-se então que Graunt fosse eleito membro da "Royal Society". O seu baixo estatuto social — era lojista em Londres — militava contra a sua eleição e a "Royal Society" teria perdido a honra de contá-lo entre os seus membros se o rei Carlos II não tivesse interferido e ordenado à sociedade que admitisse um lojista de tal mérito.

A Inglaterra, nessa época, possuia vários matemáticos de primeira ordem, entre os quais Newton e Barrow, e todos eles deviam ter conhecimento das tabelas semanais de mortalidade. É curioso que nenhum desses eminentes pensadores enxergasse o problema estatístico contido nessas publicações, ao passo que tal ideia surgiu no espírito de Graunt, que certamente não era um inventor do cálculo infinitesimal. A capacidade de perceber problemas numéricos na natureza não pressupõe um profundo conhecimento dos teoremas formais. Esta capacidade parece manifestar-se somente sob certas condições, isto é, quando existe conhecimento íntimo dos fatos e um profundo interesse por eles.

Um dos primeiros seguidores de Graunt foi Sir William Petty que, entretanto, era mais um pensador especulativo que um observador. Eis aqui duas das conclusões a que chegou: 1) A população de Londres dobra em 40 anos e a da Inglaterra inteira em 360 anos; 2) O crescimento de Londres deverá cessar espontaneamente antes do ano de 1800. Temos aí um exemplo da regra segundo a qual o raciocínio especulativo acaba por ultrapassar a observação no estudo de assuntos tão complexos.

O passo seguinte foi a publicação da tabela de mortalidade de Neumann, relativa à cidade de Breslau no quinquênio 1687-1691. Essa tabela dá o número dos falecidos para cada idade e para ambos os sexos e mostrou-se superior a todas as tabelas semelhantes, publicadas anteriormente. No ano de 1693, Halley publicou as suas tabelas aperfeiçoadas da mortalidade na Inglaterra e este trabalho constituiu a base sobre a qual os fundadores da "Equitable" pretendiam organizar o seu negocio. Já relatei a luta na qual essa companhia foi derrotada.

3) **Definição de Estatística** — Hoje não somente os governos, mas também as empresas particulares lidam com toda espécie de investigações estatísticas, cujo alcance quasi diariamente se alarga. Além destas questões práticas, cujo interesse monetário é indiscutivel, devemos insistir na importancia teórica do estudo estatístico dos organismos vivos levado a efeito pela biologia e pela psicofísica. Não há dúvida de que esta aplicação constitue o mais importante desenvolvimento da estatística neste século.

É dificil encontrar um traço comum a todas essas variadas investigações estatísticas. A melhor prova desta afirmação é o fato de existirem mais de 50 definições diferentes de estatística. A definição da estatística não pode ser dada pela simples enumeração dos objetos que são tratados pelos métodos estatísticos, pois temos estatísticas referentes não só ao número de nascimentos e mortes, de casamentos e outras instituições sociais, mas tambem relativas a dados meteorológicos, a estrelas cadentes e à cristalização das substancias químicas. A estatística já não é apenas a ciência dos negocios internos dos estados, embora seu nome ainda faça lembrar sua origem.

A palavra estatística refere-se a tres coisas inteiramente diferentes. Em primeiro lugar usamos essa palavra para designar investigações que pretendem estabelecer os fatos existentes em qualqur campo da experiencia. Essas investigações são de dois tipos. No primeiro, pretendemos enumerar e observar todos os objetos de uma dada classe e no segundo estudamos a classe por meio de uma amostra representativa. Enumerar todos os objetos pertencentes a uma certa classe pode constituir uma tarefa verdadeiramente árdua, como facilmente se percebe quando se procura saber quantos habitantes de um país devem pagar imposto sobre a renda e quantos realmente o fazem.

O segundo sentido da palavra refere-se ao tratamento dos dados. Os processos empregados para esse fim chamam-se métodos estatísticos. Os métodos que se destinam a fazer uma exposição numérica dos resultados são o objeto da estatística matemática. Nos trabalhos escritos para o público em geral, as fórmulas devem ser evitadas e os resultados devem ser apresentados sob uma fórma facilmente compreensivel.

O terceiro sentido refere-se às conclusões obtidas por esses métodos. Poderia ser chamado: estatística geral. Não teria sentido escrever um livro contendo todos os resultados da estatística, pois teria que abranger todo o campo do conhecimento humano, com excepção da lógica pura. Um trabalho de tal fórma inclusivo dificilmente chegaria a ser escrito, mas temos e continuaremos a ter no futuro um grande número de livros que tratam dos resultados estatísticos referentes a um setor da experiencia.

Apresentar palavras novas é uma tarefa ingrata e a incerteza relativa ao significado do termo "estatística" perdurará. Por razões históricas, é muito provavel que esta palavra jamais venha a ser substituida por termos como: estudo da administração, da economia e da mortalidade, mas é concebivel que outros termos, mais significativos, sejam encontrados para outros campos da estatística. Palavras desta espécie teem uma historia e alguns dos usos da palavra estatística cairam no esquecimento, embora tivessem tido o apoio das maiores autoridades. Durante um certo período a palavra estatística foi aplicada a qualquer relatorio sobre instituições que, por esta ou aquela razão, fossem consideradas interessantes, e nesse sentido Goethe usou essa palavra para designar algumas observações bastante triviais sobre a prostituição em Roma, no seu tempo. Hoje não usariamos a palavra nesse sentido.

Parece-me que todas as investigações estatísticas teem dois traços comuns: a) Tratam de fatos; b) Os fatos são expressos numericamente. Em todas as investigações lidamos com objetos que pertencem a certas classes e, por essa razão, teem alguns traços comuns. Dizemos que uma investigação é estatística quando se baseia na observação de frequencias absolutas ou relativas dos membros de uma certa classe e quando tira conclusões desses números. Uma investigação estatística começa com fatos expressos por números e depois tira conclusões desses números. O característico de lidar com números e fatos é essencial.

Esta definição evidentemente se aplica aos problemas habituais da estatística, mas é formulada de tal fórma que inclue alguns problemas cujo carater estatístico não é geralmente reconhecido. Mensurações repetidas de uma quantidade empírica fornecem um material cujo tratamento, segundo a definição aqui apresentada, constitue tambem um problema estatístico. Os dados numéricos obtidos são membros da classe "medidas da quantidade X" e as nossas deduções baseiam-se exclusivamente sobre esses números. A sua finalidade é encontrar o valor que, com base nesses dados, é a melhor determinação da quantidade desconhecida. A solução é encontrada por meio de um sistema mais ou menos complicado de proposições, conhecido pelo nome de método dos mínimos quadrados. Seguindo essas regras, encontramos não somente o melhor valor da quantidade desconhecida, mas tambem verificamos a exatidão da nossa determinação e os limites que o erro de mensuração provavelmente não ultrapassará. O método dos mínimos quadrados é geralmente tratado como uma parte da teoria dos erros de observação, mas não resta dúvida quanto ao seu carater estatístico.

4) **Coleta de dados estatísticos** — Quando Napoleão disse que a "estatística é o orçamento das coisas", referia-se aos dados econômicos e administrativos que, no seu tempo, constituiam o principal objeto da pesquisa estatística. O estatístico deve trabalhar com uma disposição de espírito tão moderada quanto a do guarda-livros ao escriturar seus livros. Quando tratamos de classes cuja extensão e constituição desejamos determinar, a semelhança com a escrituração é completa. Quando as classes são tão grandes que não podemos enumerar cada elemento, a pesquisa estatística assemelha-se mais ao ato de escolher uma amostra de um lote de trigo posto à venda. Em qualquer caso, o importante é conservar o espírito livre de ideias preconcebidas.

O problema que pretendemos resolver determina o carater dos métodos que devemos empregar. É preciso esclarecer bem os objetivos da investigação e adaptar os métodos de acôrdo com eles. Os planos para avaliação dos resultados devem estar prontos antes de iniciar-se a coleta dos dados, pois do contrário os dados dificilmente servirão como base adequada para as deduções. Isto significa que tais investigações devem ser planejadas por estatísticos especializados, e familiarizados com os fatos desse campo particular da experiencia. Dados estatísticos referentes a escolas são melhor coligidos por professores, dados estatísticos referentes à medicina, por médicos e dados estatísticos biológicos por especialistas nesse campo. Os meios de que dispõe o investigador nunca são ilimitados e decidir o que pode ser realizado com meios limitados dentro de um espaço de tempo tambem limitado, exige uma capacidade de visão que somente a experiencia pode dar, contanto que a pessoa possua uma aptidão natural para esta espécie de trabalho.

5) **Probabilidades constantes** — Discutimos a influencia das condições constantes e variaveis dos acontecimentos casuais ao tratar do teorema de Bernoulli. Devemos basear nosso julgamento exclusivamente sobre os números observados e a coleta dos dados necessários é muito trabalhosa. A prova de que um acontecimento casual tem uma probabilidade constante é importante, pois prova a existencia de um grupo de condições tão estavel quanto o conteudo de uma urna. A existencia de tal grupo, portanto, é um fato indiscutivel e a sua descrição constitue um problema para pesquisa futura.

A prova de que estamos lidando com probabilidades constantes em alguns casos é facilmente conseguida, ao passo que em outros oferece dificuldades quasi insuperaveis. A prova de que a proporção entre nascimentos de meninos e meninas em um país é constante, é trabalhosa porque exige observações extensas, relativas a muitos anos, mas pode ser obtida sem dificuldade. Os atributos pelos quais distinguimos entre os elementos das duas classes correpondem a dois grupos bem definidos que não admitem nenhuma sub-divisão significativa. Não conhecemos atributos de espécie alguma que aumentem ou diminuam a probabilidade do nascimento de um menino. Em outros casos as coisas não se passam assim.

Tomemos, por exemplo, a probabilidade de que um homem de 45 anos morra dentro de um ano. Contamos o número de homens dessa idade e observamos quantos dentre eles ultrapassam um ano a mais de vida. As frequencias relativas não apresentam a mesma estabilidade e facilmente se vê que a classe de homens de 45 anos admite várias sub-divisões significativas. As possibilidades variam conforme a profissão do indivíduo e seu passado, que talvez inclua molestias que debilitam o organismo. A classe dos homens de 45 anos não é homogênea, mas é constituida por um número indefinido de sub-classes para as quais a probabilidade de morte dentro de um ano pode ter valores muito diferentes. O número de pessoas de 45 anos que morreram no ano passado não é devido a uma probabilidade simples, mas a uma probabilidade compósita. É uma probabilidade média, tal como aquela a que faz referencia o teorema de Poisson.

Como terceiro e último exemplo, vamos examinar as probabilidades com que operamos na psicofísica. As reações dos sujeitos não são inteiramente determinadas pelas condições experimentais e são, no sentido subjetivo, acontecimentos casuais. Sabemos que vários fatores influenciam a comparação de dois estímulos, dois pesos, por exemplo, e por isso inventaram-se recursos técnicos por meio dos quais podemos conservar constante essa influencia. Não temos certeza de que a lista desses fatores seja completa, mas o fato é que temos de lidar com acontecimentos casuais de probabilidades constantes se conservarmos constantes esses fatores. Quando um desses fatores varia os resultados deixam de apresentar a mesma estabilidade.

Isto sugere qual o ponto de vista que devemos adotar nesta questão. A questão envolve o problema da definição correta das noções que empregamos no estudo da natureza. Na psicofísica, lidamos com as reações do sujeito sob tais e tais condições. Quando as nossas condições experimentais são suficientemente precisas, obtemos probabilidades constantes e podemos supor que a nossa definição corresponde às condições existentes. Uma probabilidade constante nos confronta com um grupo de condições que não podem ser analisadas por meio dos processos de investigação de que dispomos atualmente. Temos que toma-lo como um fato, no mesmo sentido em que a constante da gravitação é 9,8 ms. É curioso que no caso da proporção dos nascimentos a natureza parece oferecer-nos a classificação correta em uma bandeja de prata, ao passo que em outros casos cria dificuldades quasi insuperaveis.

Todas essas dificuldades se originam do fato de que as frequencias observadas constituem a nossa única fonte de informações. Terminaremos estas considerações mais ou menos abstratas com um exemplo mais leve. Suponhamos que tenhamos retirado uma série de bolas de uma urna e que as frequencias relativas observadas mostrem que estamos lidando com um grupo constante de condições. A estatística não nos levará mais longe do que isso. Se descobrirmos um meio de abrir a urna, o seu conteudo se nos tornará diretamente accessivel e deixará de haver qualquer dúvida quanto ao grupo constante de condições. Abrir a urna à força corresponde, no exemplo da proporção de nascimentos, à aquisição de alguma informação relativa aos fatores que determinam o sexo de uma criança, como por exemplo a constatação de que o sexo é determinado pela idade do óvulo, de maneira que a fertilização de um óvulo cuja idade não ultrapasse um certo número de dias, resulta em uma menina, ao passo que a fertilização em um estágio mais adiantado produz um menino. Esta é uma das muitas teorias que procuram explicar as observações relativas à proporção dos nascimentos.

Já disse repetidamente nas minhas aulas que as noções que empregamos na vida diária são em geral vagas, mas adaptam-se suficientemente aos objetos para servir aos fins comuns. Atribuir definições claras aos objetos empíricos é uma árdua tarefa. Se pretendermos contar o número de cegos em um país, ficaremos atrapalhados pela questão de saber o que se deve entender pela palavra cego. Alem das pessoas cuja vista foi completamente destruida, ha algumas que podem reconhecer os objetos que os cercam, mas cuja fraqueza de visão as impede de exercer a única profissão em que são habilitados. Temos ainda outras que percebem a diferença entre o dia e a noite, mas são incapazes de distinguir objetos e eventualmente poderemos encontrar algumas que são capazes de perceber apenas uma luz muito forte colocada imediatamente à sua frente. Deverão todas essas pessoas ser contadas como cegas e, no caso negativo, onde começa a cegueira?

As consequencias sociais e econômicas de uma molestia são importantes para o estatístico como para o psicólogo. Um defeito de visão pode constituir uma catástrofe econômica para um homem que se veja, por essa razão, sem emprego, ao passo que pode ter uma influencia relativamente pequena se, após dominar o choque psíquico, ele puder continuar trabalhando, quer na sua profissão, quer em um outro trabalho mais adequado. Ha, na historia da matemática, um exemplo notavel. Euler tornou-se cego por haver forçado demais os seus olhos já fracos em um trabalho muito complicado. Não podendo mais escrever, tentou ditar e o seu compendio de álgebra foi o primeiro resultado desses esforços. Convencido de que podia formular as suas ideias por essa fórma, continuou a produzir cientificamente, como se nada lhe houvesse acontecido. Este caso é excepcional, mas o problema econômico dos cegos, na nossa época, pode ser resolvido de várias maneiras. Ha na indústria muitos tipos de trabalho que não exigem absolutamente a visão e um dos deveres sociais do psicólogo industrial consiste em encontrar as ocupações que podem ser desempenhadas por pessoas vítimas da cegueira ou de outros defeitos.

Identica relação existe entre as deficiencias mentais e as condições sociais. Uma criança que, nas dificeis condições de vida de uma grande cidade, é considerada como mentalmente retardada, poderá passar por normal em um lugar distante apenas 50 kms., nas condições mais simples da vida rural. Daí concluimos que não existe uma definição absoluta de atrazo mental, tal como não é possivel dar uma definição precisa da cegueira, que inclua todos os casos. No trabalho prático, encontramos sempre objetos a respeito dos quais ficamos em dúvida sobre se pertencem ou não à classe que estamos investigando. É muito simples dizer que a bola que tiro de uma urna tem que ser branca ou preta, mas no trabalho real encontramos bolas de vários tons de cinza e ficamos na dúvida sobre se contamo-las como brancas ou pretas.

6) **Regularidades estatísticas** — A probabilidade de morrer dentro de um ano evidentemente varia com a idade. Afim de estudar essa relação, observamos essa probabilidade em relação às várias idades e fazemos um gráfico dos resultados, representando as idades na linha horizontal, ou eixo X e nas linhas verticais os valores das probabilidades correspondentes. Dessa maneira obtemos uma série de pontos que esboçam uma curva. Se fôssemos capazes de encontrar a fórmula dessa curva o problema estaria resolvido, pois introduzindo qualquer valor de x — a idade — a fórmula nos daria a probabilidade desejada. A variavel independente, neste exemplo, é o tempo, mas o mesmo raciocinio será válido sempre que quizermos estudar a relação existente entre uma probabilidade variavel e um fator capaz de apresentar variações contínuas. Nas funções psicométricas, a intensidade do estímulo de comparação é a variavel independente que determina a probabilidade de uma certa reação.

O problema assim formulado é tratado no capítulo da matemática denominado: teoria da interpolação. A palavra interpolação aplicada ao nosso problema, contem um certo humor sombrio. O verbo latino "interpolare" significa: inserir deslealmente, tal como uma palavra ou frase espúria em um livro ou manuscrito. Subentende introduzir furtivamente qualquer coisa em um lugar onde não devia estar. Os matemáticos, ao se apropriarem desta palavra, livraram-na primeiro desse segundo sentido e definiram interpolar como preencher as lacunas entre os termos de uma série. Ha muitos métodos de interpolação, mas todos teem um traço comum: é preciso fazer uma suposição a respeito da relação entre as duas variaveis. É verdade que os matemáticos, lá entre eles, fazem questão de formular claramente essa suposição, mas para os que estão fóra desse círculo, a interpolação é quasi um milagre. Não percebem que, antes que o milagre se realize, teem que engolir uma suposição, tal como um peixe engole a isca, e neste sentido a palavra "interpolare" conserva o sentido que lhe atribuiam os antigos romanos.

A interpolação constitue, por si só, uma pequena ciencia e não pretendo entrar em nenhum detalhe técnico a seu respeito. Os métodos de interpolação dividem-se em dois grandes grupos. Nos do primeiro grupo, a curva é traçada de tal fórma que passa exatamente pelos pontos que foram determinados pela observação real. Isto constitue uma vantagem, pois o método não altera coisa alguma nos dados reais da observação. É uma desvantagem porque esses dados são determinações empíricas de probabilidades desconhecidas e estão sujeitos a serem afetados por erros de observação, como mostra o teorema de Bernoulli. Estes métodos teem ainda outra desvantagem: os resultados desta interpolação são fidedignos somente no centro da tabela. Nas duas extremidades a interpolação muitas vezes é inexata e a curva encontrada por meio dela segue um curso que não concorda com as nossas ideias a respeito da relação entre as duas variaveis. As fórmulas dessa espécie não servem para responder questões deste tipo: dá-se o número de habitantes dos Estados Unidos em cada um dos anos: 1900, 1910, 1920, 1930, 1940 e 1950; qual será, provavelmente, o número de habitantes dos Estados Unidos em 1960? Estamos plenamente cientes de que essa estimativa só pode ser aproximada, mas se usarmos uma das fórmulas de interpolação, poderemos chegar a um resultado inteiramente inaceitavel.

As observações entre as quais desejamos fazer interpolações devem ser numerosas, de maneira que os intervalos entre valores sucessivos sejam suficientemente pequenos. A norma é obvia, e ninguem irá discuti-la, mas na prática nunca podemos ter certeza quanto à qualidade das nossas observações. Precisamos tirar o máximo dos nossos resultados e isto pode levar-nos a um beco sem saida. O seguinte incidente histórico ilustra bem esse ponto. Antes do invento do registrador automático de temperatura, as variações diárias da temperatura eram observadas de 6 em 6 horas, isto é, a temperatura era medida quatro vezes por dia. Surgiu a questão de saber a que hora da noite a temperatura era mais baixa. Para resolver essa questão, é preciso determinar o ponto em que a curva que representa essas variações registra um valor mínimo. Para grande surpreza dos meteorologistas, resultou que esse mínimo era aproximadamente à meia noite. Isso, naturalmente, não concorda com a ideia de que o resfriamento do ar deve prosseguir enquanto nenhum calor lhe seja emprestado pelo sol, e muitas teorias mais ou menos plausiveis foram apresentadas para explicar essa observação. Todas essas especulações mostraram-se vazias de sentido quando o registro automatico mostrou que a temperatura era mais baixa ao nascer do sol.

A dedução das fórmulas pertencentes ao segundo grupo toma em consideração o fato de que as determinações de probabilidades desconhecidas são afetadas por erros, de maneira que não tem sentido insistir em que a curva deva passar exatamente por todos os pontos. Ao contrario, o que desejamos é eliminar, tanto quanto possivel, esses erros de observação. Os nossos dados não são exatos e não indicam uma curva, mas antes uma faixa de largura finita e todas as curvas que não sairem desa faixa serão igualmente aceitaveis. Escolhemos aquelas cujo curso corresponde às nossas ideias sobre a relação existente entre as duas variaveis em questão. Existe uma pequena proposição muito cômoda que se refere ao grau de desacôrdo que pode ser tolerado entre os cálculos e as observações em uma dada série de observações e assim determina a largura da faixa que a curva não deve ultrapassar.

Consideremos como um primeiro exemplo a função psicométrica dos julgamentos "mais pesado" em uma série de experimentos de comparação de pesos. A probabilidade desses julgamentos, estabelecida com valores muito pequenos, aumenta constantemente à medida que aumentam os pesos de comparação e aproxima-se da unidade. Esse aumento é ininterrupto. É rápido na parte central da série e lento nas duas extremidades. A esses fatos corresponde uma curva que aumenta constantemente entre os valores zero e um e se aproxima desses valores assimptoticamente. Qualquer fórmula que forneça uma curva dessa espécie servirá como hipótese sobre as funções psicométricas dos julgamentos "mais pesado". A questão de saber qual dessas hipóteses — que **a priori**, teem o mesmo valor — será a melhor para os nossos fins, tem que ser respondida apelando para a experiencia: decidir-nos-emos pela hipótese que melhor se adapte aos nossos dados experimentais. De acôrdo com o teorema de Bernoulli, a fórmula que melhor representa os dados é aquela na qual a soma dos quadrados das diferenças entre os valores calculados e os observados é menor. Sempre podemos decidir qual, dentre um grupo de expressões, melhor se adapta aos dados. Essa decisão nem sequer é muito trabalhosa.

Este proceso é direto e leva com certeza a uma decisão inequívoca. A este respeito nada deixa a desejar. Ha somente dois pontos nos quais esta solução não é inteiramente satisfatória. O primeiro é que existe um número infinito de fórmulas que satisfazem a condição de apresentar um aumento ininterrupto e uma aproximação assimptótica dos valores zero e um, ao passo que o número das funções que realmente podemos examinar é necessariamente limitado. É um conhecimento relativamente modesto, com o qual nos temos de satisfazer. Já teremos aprendido através de amargas experiencias que a verdade absoluta em assuntos empíricos é inatingivel e que nos devemos satisfazer com a explicação mais plausivel, mas neste caso nos teremos de contentar com a melhor fórmula dentre as experimentadas, e o número destas é muito pequeno. O estudo dos méritos relativos das diversas hipóteses possiveis a respeito das funções psicométricas é um dos problemas da psicofísica e relaciona-se com o chamado método dos estímulos constantes.

O segundo ponto é que o nosso conhecimento da melhor hipótese a respeito das funções psicométricas se refere a um fato isolado e não se relaciona com qualquer outra experiencia. Ajuda-nos a resolver muitos problemas práticos, mas não faz progredir o nosso conhecimento teórico. Possuimos fórmulas muito uteis para as funções psicométricas, mas até hoje ninguem foi capaz de deduzir essas fórmulas, de maneira plausivel, das suposições gerais. Gostariamos de possuir uma série de regras ou principios gerais dos quais pudessemos deduzir essas fórmulas. Não possuimos informação alguma quanto ao processo pelo qual o sujeito, comparando dois pesos, chega ao julgamento de que o segundo é mais pesado que o primeiro.

Na derivação das fórmulas, a posição do físico é muito mais vantajosa. Ele parte de suposições que já foram postas à prova inúmeras vezes e que provaram o seu valor para a explicação dos fenomenos naturais. A confiança que depositamos nesses principios gerais é muito maior que aquela que nos inspira qualquer observação particular. Os princípios da física são baseados em um acervo de experiencia tão grande que qualquer observação que não concorde com eles tem que passar por inúmeras provas antes de ser aceita. A seguinte anedota ilustrará este ponto. Um amigo de Hamilton, o famoso inventor das equações hamiltonianas, observou-lhe que jamais encontrara um homem que acreditasse na refração cônica sem a haver visto com os proprios olhos. Hamilton respondeu rindo: "Que diferença de mim: Pois se eu apenas a tivesse visto, não acreditaria nela. Os meus olhos já me iludiram tantas vezes! Acredito na refração cônica porque a provei". Esta confiança baseia-se na convicção de que uma proposição que é logicamente verdadeira em relação a um sistema de pensamento empiricamente verdadeiro, deve ser tambem empiricamente verdadeira; a demonstração ocular da sua verdade empírica é um mero acidente.

As ciencias biológicas, atualmente, não estão na feliz situação de possuir um sistema de princípios cuja verdade empírica esteja fóra de discussão. Cada problema novo exige uma nova explicação e isto muitas vezes dá a impressão de que estamos lidando com hipóteses elaboradas para esse fim especial. Isso não nos deve desencorajar se lembrarmos que a idade da biometria se conta em décadas, ao passo que a física tem atrás de si uma história várias vezes secular. Podemos, entretanto, esperar que os incansaveis esforços dos que trabalham nesse campo levarão ao estabelecimento de um sistema de principios semelhante àquele de que se vangloriam os físicos.

Várias tentativas já se fizeram no sentido de deduzir fórmulas para a representação das regularidades estatísticas por meio da dedução abstrata. Discutiremos duas dentre elas, sem entrar, contudo, nas minúcias da técnica matemática. A primeira é a dedução de uma fórmula para a mortalidade, elaborada por Makeham. Partimos da suposição de que o desaparecimento gradual de uma geração depende de dois fatores. Um deles é constante em todas as idades, ao passo que o outro depende do gasto do organismo e reduz-lhe a capacidade de resistencia. A influencia deste último fator aumenta à medida que a idade avança. Depois estabelecemos uma quantidade que mede a mortalidade em uma certa idade e que é chamada intensidade de morte nessa idade. Traduzindo essas ideias na linguagem da matemática, estabelecemos uma equação diferencial cuja solução dá uma fórmula que descreve bem as observações reais sobre a mortalidade. Observamos incidentemente que a ideia de formular uma hipótese adequada sobre a intensidade de morte havia sido proposta antes e por essa razão falamos na fórmula de Gompertz-Makeham.

Não ha dúvida quanto à correção da solução da equação diferencial que, aliás, é uma questão muito simples. O nosso julgamento quanto ao valor de toda a argumentação depende inteiramente da confiança que depositamos nas suposições que nos levam a estabelecer essa equação. Se forem tão legítimas quanto as suposições das quais se derivam as leis da queda dos corpos, não hesitaremos em tirar todas as conclusões que essa fórmula pode justificar. Uma dessas consequencias diz que a ordem em que uma geração morre pode ser determinada com antecedencia, de maneira que a observação real desse processo tem apenas o valor de um controle da correção dos nossos cômputos. As discrepancias existentes entre os cálculos e as observações podem sugerir uma ligeira alteração das constantes que entram na fórmula, mas o valor desta nunca pode ser discutido.

Uma pessoa à qual este argumento é apresentado pela primeira vez, pode julgar o raciocinio artificial, e constitue uma surpreza verificar que o resultado resiste à prova da experiencia. Essas ideias são estranhas e a gente se sente tentada a negar que a intensidade de morte seja uma quantidade e possa ser expressa numericamente. Se lembrarmos que essa quantidade mantem uma relação com a probabilidade de morrer em uma dada idade, esta dificuldade desaparece. As noções de massa, força, energia, etc., com que opera a física atualmente, tambem não foram corretamente definidas desde a primeira tentativa. As noções científicas são resultado de um desenvolvimento histórico e não se deve esperar que as noções exigidas pelas ciencias biológicas constituam uma exceção dessa regra.

A segunda fórmula que pretendemos discutir é conhecida pelo nome de Lei de Pareto, e refere-se a assuntos econômicos. As publicações anuais relativas ao rendimento do imposto sobre a renda indicam o número de pessoas que auferiu rendas de determinada importancia. A tabela começa pela mais baixa renda tributavel e vai subindo, com intervalos convenientes, até a mais alta soma ganha por uma só pessoa no país. Essa é a tabela da distribuição das rendas e a sua representação gráfica dá, a um só olhar, uma boa ideia geral dessa distribuição. Pareto não se satisfez com o gráfico feito da maneira habitual, e elaborou a sua propria curva escolhendo uma certa escala de medida para os eixos X e Y; a sua nova carta demonstrou a existencia de uma relação extraordinariamente simples entre a importancia da renda e o número de pessoas que a auferem. Usando deste fato como ponto de partida, ele tambem estabeleceu uma equação diferencial, cuja solução nos dá a lei que tem o seu nome. Essa fórmula foi aplicada em dados obtidos em diversos paises, com êxito variavel. Existe, entretanto, um fato notavel relacionado com essa lei. A fórmula contem uma constante que varia muito pouco de país para país. Apresenta valores que vão de 2,25 a 2,9 e parece indicar uma similaridade nas condições econômicas em vários paises. Uma das curiosas consequencias da lei de Pareto é o fato de que os obstáculos que um indivíduo encontra nos seus esforços para conquistar uma grande fortuna, não semelhantes aos que dificultam a longevidade. Tanto a lei como as suas deduções teem sido frequentemente criticadas e muitas tentativas se teem feito para melhora-la. É mais um exemplo em que partimos de soluções adequadamente escolhidas e chegamos a fórmulas que se adaptam às nossas observações.

Ao julgar o valor de fórmulas como as de Makeham e de Pareto, precisamos esclarecer bem este ponto: a correção do raciocínio matemático não está em discussão. Na maioria dos casos, é bastante simples de maneira que um erro dificilmente passaria despercebido. O único ponto a discutir é o estabelecimento da equação diferencial e o valor das suposições usadas. Quando se tem completa confiança nelas, podem-se comparar as regularidades estatísticas com as astronômicas, como teem feito alguns autores proeminentes. Pode-se, por exemplo, determinar as constantes da fórmula de Makeham por meio de umas poucas observações e então predizer a ordem segundo a qual uma geração morrerá. Esta é a maneira otimista de considerar as regularidades estatísticas.

O ponto de vista realista é mais cauteloso. Suponhamos que a fórmula de Makeham seja coreta e que os coeficientes tenham sido determinados para o corrente ano. Mesmo nesse caso a nossa previsão do futuro não é necessariamente correta, pois uma melhoria das condições higiênicas, resultante de uma nova invenção ou, por outro lado, a deflagração de uma guerra pode alterar a probabilidade de sobrevivencia de maneira imprevisivel. A probabilidade de morrer depende de condições por demais numerosas para que seja possivel enumera-las ou toma-las todas em consideração. As suposições de Makeham podem ser corretas, mas não são exaustivas. O grupo de condições cuja influencia é idêntica em todas as idades representa os perigos aos quais estamos expostos em todas as idades. Na realidade, esses perigos variam segundo as idades, como mostra o exemplo da guerra, que põe os jovens de ambos os sexos em maior perigo que os velhos. Observação semelhante pode ser feita relativamente à segunda suposição, de que a capacidade de resistencia do organismo diminue com a idade. De uma fórma geral, sem dúvida é verdadeira, mas para estabelecer a equação diferencial precisamos especifica-la e isto implica uma suposição dificil de justificar.

O mérito de tais fórmulas não reside tanto na sua dedução quanto ao seu êxito em descrever grandes grupos de fatos. Uma vez de posse de uma fórmula dessa espécie, podemos esquecer a sua dedução e usa-la para os fins práticos para os quais foi inventada. O êxito de algumas destas fórmulas é verdadeiramente surpreendente. É preciso dizer, a favor das deduções abstratas, que estas fórmulas uteis são tão complicadas que dificilmente teriam sido encontradas através de tentativas somente. Assim, essas especulações abstratas, afinal de contas, veem servir a fins práticos, e, de qualquer maneira, não se poderia proíbi-las, pois são um dos mais fascinantes problemas da ciencia.

7) **A teoria das classes empíricas** — Seja M uma classe da qual todos os elementos possuem um atributo A que admite uma determinação numérica. O atributo A está contido na definição de M, mas o seu valor numérico é independente dela e não pode ser deduzido da definição de M. Aqui estão alguns exemplos: o peso dos indivíduos de determinado sexo e idade; a duração dos casamentos; a proporção entre a largura e a altura dos livros, das janelas ou das conchas de certas espécies; a duração do tempo de reação ou qualquer outro processo fisiológico ou psicológico. Como caracterizaremos a classe em relação a esse atributo numérico?

O interesse lógico deste problema é conhecido de ha muito, mas até ha pouco tempo ninguem tentou darlhe uma resposta exata. O atributo A pertence necessariamente a todos os elementos de M, mas o seu valor numérico permanece indeterminado. Não existe, por exemplo, indivíduo humano que não tenha peso, e a experiencia mostra que esse peso se situa entre dois limites, superior e inferior, de fórma que fóra desses limites não se pode encontrar nenhum indivíduo da raça humana.

O valor numérico de A é um atributo que não está contido na definição de M, e a sua existencia em um indivíduo particular, pertencente à classe M, constitue acaso no sentido lógico do termo. Às vezes esse problema é apresentado sob a fórma da seguinte pergunta: todos os indivíduos da espécie "Homem" teem um certo peso; qual é, por definição, o peso do homem? Uma resposta muito popular é a seguinte: uma noção não tem peso e a pergunta não tem sentido. Esta brincadeira, que parece remontar ao filósofo Hume, ilude a dificuldade, mas não a resolve. Se nos perguntassem qual é a côr da violeta, responderiamos que é um matiz escuro do azul, e não nos entrincheirariamos por trás do argumento de que uma noção não tem côr. O fato é que os elementos de M diferem em relação aos valores de A e o problema é o seguinte: como descrever essas variações?

Chamamos empírica uma classe quando na experiencia real são encontrados objetos que pertencem a essa classe. Limitaremos as nossas considerações, daqui por diante, a essas classes empíricas cujos elementos podem ser ordenados por um atributo que admite determinação numérica. A continuidade de A não é exigida, mas a possibilidade de determinação numérica é indispensavel. As classes dessa espécie são chamadas, em alemão "Kollektivgegenstände". Ao tratar de classes de organismos, usa-se o termo espécie.

O estudo das classes empíricas começa com a coleta de um amostra, sobre cujos elementos se fazem as mensurações exigidas. Verifica-se que os resultados se dispersam sobre um intervalo maior ou menor, e que dentro desse intervalo os resultados se distribuem de uma certa maneira. Os resultados se aglomeram mais intensamente em certos pontos e, quando a amostra é suficientemente grande, a representação gráfica dos dados sugere o contorno de uma curva. Esta é a curva de distribuição e uma fórmula que a represente é chamada a lei de distribuição da classe. O estudo das leis de distribuição nas classes empíricas é um caso especial do problema mais geral de encontrar regularidades estatísticas, que já discutimos mais atrás. O atributo variavel é a variavel independente e as frequencias devem ser representadas como funções desta. Os métodos matemáticos usados para isso não diferem dos que se empregam no estudo das regularidades estatísticas.

A fórma das distribuições é muito variada. Em muitas delas os valores se aglomeram ao redor de um valor situado no centro da tabela e as frequencias decrescem em ambos os lados com maior ou menor rapidez. As curvas correspondentes teem um maximo que é chamado a moda e aproximam-se, nas duas extremidades, do valor zero. Algumas são simétricas e decrescem igualmente dos dois lados do máximo, enquanto que outras apresentam uma forte inclinação de um lado, e caem em declive suave do outro. Alem disso, temos curvas com dois ou mais valores máximos e, eventualmente, algumas que teem um máximo em uma das extremidades da tabela e um mínimo mais ou menos no centro. Essa variedade na fórma das curvas exclue a possibilidade de representar todas as distribuições por meio de uma única fórmula.

Uma dessas distribuições é de particular importancia. É representada por uma curva que cai simetricamente dos dois lados e é chamada a curva normal de distribuição. Uma distribuição simétrica não é necessariamente normal. A ascenção, e, em razão da simetria, a descida tambem, podem ser mais ou menos rápidas, mas a curva é inteiramente determinada por duas quantidades: primeiro, a posição do máximo e, segundo, uma quantidade que caracteriza a rapidez da ascenção.

A curva normal de distribuição tem várias qualidades que a tornam extremamente util para fins práticos. A primeira é que as duas quantidades que caracterizam a distribuição são faceis de calcular — vantagem prática que não deve ser subestimada. A segunda é que a média dos valores observados coincide com o máximo da curva. Isto implica que os desvios positivos e negativos da média teem as mesmas probabilidades e que podemos descrever toda a classe através de um indivíduo que corresponde à média. Afim de descrever a classe, tomamos um desses indivíduos que possuem o atributo A no seu valor mais frequente, e qualquer afirmação que seja verdadeira a respeito desse indivíduo, deverá ser verdadeira a respeito de toda a classe, pois para cada indivíduo que possue esse atributo em um grau mais alto, haverá outro indivíduo que possue esse atributo em grau igualmente mais baixo.

Em uma distribuição normal, a média é representativa ou típica de toda a classe. Os indivíduos particulares diferem da média, mas trata-se meramente de desvios casuais do tipo.

O valor mais provavel e a média não coincidem nas distribuições assimétricas. A consequencia é que não existe um tipo, no sentido que acabamos de definir e não podemos descrever toda a classe através de um indivíduo. Desvios positivos e negativos de iguais magnitudes não teem as mesmas probabilidades. Aqui vemos a importancia da suposição de que uma distribuição empírica possa ser representada por um curva normal. Se esta afirmação fôr provada por fatos, constituirá um importante conhecimento, mas se lhe faltar esse apoio, será apenas uma suposição arbitrária.

8) Observações sobre a historia da lei normal — A lei normal foi usada pela primeira vez na teoria dos erros de observação e o método dos mínimos quadrados, que busca a eliminação desses erros, nela se baseia. Fóra deste campo limitado, foi empregada em primeiro lugar por Quételet, cuja rica personalidade merece a nossa atenção. Começou como estudante de arte, escreveu poesias, e colaborou em uma ópera que chegou a ser levada em Ghent, em 1816. Para ganhar a vida, aceitou, em 1815, com a idade de 19 anos, um cargo de professor de matemática. Em 1823 foi a Paris a serviço, e lá entrou em contacto com os mais proeminentes matemáticos franceses. Jovem e entusiasta como era, apanhou-lhes as ideias sobre a probabilidade e a influencia exercida sobre ele por Poisson foi particularmente forte. A demonstração de Poisson do teorema que tem o seu nome é inteiramente abstrata e despida de qualquer misticismo, mas existe no seu pensamento sobre o seu proprio raciocinio relativo ao teorema, um elemento que, embora vago, apresenta uma forte atração para a imaginação. "Coisas de todas as espécies, diz ele, estão sujeitas a uma lei que podemos chamar a lei dos grandes números. Segue-se destes exemplos que a lei geral dos grandes números é um fato indiscutivel, que resulta das experiencias que não se contradizem". Para ele a lei dos grandes números é uma lei da natureza, e não simplesmente a proposição abstrata tão inteligentemente demonstrada no seu livro.

Logo após o regresso de Paris, Quételet começou a sua longa série de publicações sobre a aplicação da probabilidade aos problemas sociais. Os seus livros e artigos são escritos de maneira atraente e possuem o raro mérito de prender a atenção do leitor. Acumula exemplos sobre exemplos afim de ilustrar a lei dos grandes números, extraindo-os principalmente das estatísticas sociais. Quando fala das regularidades dos suicidios, ou, para usar as suas palavras, da "terrivel exatidão com que os crimes se reproduzem", encontra palavras que não podem deixar de comover o leitor. A personalidade forte e atraente de Quételet forneceu o impulso que a estatística, nos seus primordios, tanto necessitava. Sem pretender diminuir em nada os seus méritos, discutiremos os seus pontos de vista a respeito da lei normal e do seu emprego na estatística.

Quételet concebeu a ideia de que a natureza produz os indivíduos de uma espécie de acôrdo com um certo tipo e ao fazê-lo comete erros da mesma maneira que um observador mais ou menos cuidadoso comete ao medir uma quantidade empírica. Cada indivíduo oferece uma oportunidade para que se observe o tipo da sua espécie, mas ao fazê-lo cometemos certos erros devidos ao fato de que o indivíduo não é um representante perfeito do seu tipo.

A curiosa posição ocupada pela lei normal no pensamento de Quételet pode ser melhor observada na sua investigação relativa à altura de 100.000 recrutas franceses. Sob alguns aspectos os seus cálculos concordam muito bem com os fatos observados, mas estimaram em 26.345 o número de recrutas cuja altura estaria abaixo do mínimo, quando na realidade 28.620 homens ficaram isentos do serviço militar em razão da sua pequena estatura. A conclusão mais prudente parece ser que a fórmula não concorda muito bem com as frequencias observadas nas classes mais baixas, mas Quételet vai mais longe e vê, no fato de que foi recusado um número de homens maior que aquele que os cálculos levavam a esperar, a prova de que operações fraudulentas haviam sido praticadas no recrutamento. A sua opinião é que, exatamente em 2.275 casos os recrutas haviam sido recusados fraudulentamente.

Do ponto de vista formal, o argumento de Quételet é idêntico ao raciocínio que levou Gauss à conclusão relativa ao método pelo qual foi calculado o logaritmo da função tangente nas táboas de Vega. A diferença está no material em questão. Neste caso, não resta dúvida quanto à correção das suposições sobre as quais se basearam os cálculos, ao passo que a lei normal é primeiro provada com base no material investigado e então uma parte desse material é rejeitada, porque não se conforma com a lei. Quételet combina dois pontos de vista conflitantes em relação à lei normal da distribuição. Vê nela um resultado da experiencia, mas considera-a tambem como uma norma à qual a experiencia se tem que conformar.

Quételet aferrou-se a esses pontos de vista a despeito do fato de lhe haverem sido comunicados dados que não deixam dúvida quanto à existencia de classes empíricas com distribuições assimétricas. No seu livro sobre a probabilidade publicou táboas sobre as variações da pressão barométrica, que apresentavam uma distribuição nitidamente assimétrica. Essas tabelas lhe haviam sido comunicadas por Bravais, que imediatamente assumiu o ponto de vista correto: a cada classe empírica corresponde uma curva particular de distribuição, cuja lei podemos encontrar em alguns casos, e em outros não. No primeiro caso podemos deduzir a fórmula quer dos princípios gerais, quer da experiencia.

Esse ponto de vista moderado passou despercebido, e é curioso notar o forte ascendente exercido pelos pontos de vista de Quételet sobre o espírito dos investigadores. Parece que G. Th. Fechner, o pai da psicofísica, foi o primeiro a estudar as distribuições empíricamente e sem ideias preconcebidas. Continuou por muitos anos nos seus esforços persistentes, e na época da sua morte o seu trabalho ainda não estava terminado. As suas notas, publicadas postumamente, constituem uma curiosa leitura. Fechner apresenta um fato após outro afim de provar que a lei normal não descreve todas as distribuições, mas não tira a conclusão obvia de que as distribuições devem ser investigadas sem hipóteses preconcebidas. Quando chega ao ponto em que deve formular a sua propria teoria, a solução que apresenta é imprecisa e consiste meramente em uma leve variação da fórmula, que não difere essencialmente da hipótese da lei normal.

A solução de Fechner não é nem original nem satisfatória, mas o seu mérito consiste na compreensão de que o estudo das distribuições é um problema empírico. A publicação tardia dos seus estudos foi de lamentar-se, pois roubou-lhe grande parte do renome que lhe é devido como um dos criadores desses estudos. Gosto de tentar adivinhar as razões pelas quais Fechner adiou a publicação dos seus pontos de vista. As notas dão a impressão de que havia chegado ao ponto de vista correto relativamente à lei normal na década de 1880 e que nessa data tinha à sua disposição um acervo consideravel de dados. O que faltava era a ideia de como poderiam esses dados ser tratados matematicamente. O trabalho de Pearson e de Bruns indicam com bastante exatidão as ideias que faltavam a Fechner. O cientista muitas vezes se confronta com uma situação dessa espécie, mas ninguem sabe se a inspiração correta surgirá ou não. Quando ele tem essa sorte chamam-no de gênio, e no caso contrario, o máximo que pode conseguir é um compadecido sacudir de ombros.

Pearson rejeita a ideia de que todas as distribuições possam ser representadas por uma curva normal. Elaborou fórmulas para uma série de curvas tão diversas na fórma, que uma delas com certeza convirá a qualquer distribuição dada. Ao estudar um problema particular, temos que decidir primeiro qual a curva que pretendemos usar e esta decisão é atingida por certo número de passos que Pearson descreve detalhadamente. O passo seguinte consiste em determinar essa curva de tal fórma, que se adapte tanto quanto possivel às observações. A curva normal é apenas um dos casos possiveis.

Pearson aliava um espírito vivo e incisivo à capacidade de planejar e executar investigações estatísticas. Alem disso, teve a felicidade de encontrar um grande número de colaboradores e a sua influencia na estatística só pode ser comparada com a de Quételet. E não devemos esquecer que a sua "Gramática da Ciencia" é um dos grandes livros sobre as teorias científicas. Tomou como norma de vida ter sempre um "hobby" intelectual — uma pesquisa histórica ou científica — alem do seu trabalho profissional e aconselhava aos seus confrades a fazer o mesmo, pois dessa fórma se adquirem muitas informações que podem vir a ser uteis.

Seria uma tarefa laboriosa e, talvez, não muito fecunda, expôr detalhadamente os pontos de vista de Pearson sobre a curva normal. Citaremos apenas duas passagens que tornam bastante clara a sua maneira de ver. Ele propõe a questão de saber se a suposição de uma curva normal se justifica ao estudar uma distribuição e argumenta da seguinte fórma: Esta suposição certamente não é válida para todos os organismos vivos, mas descreve de maneira notavel a maioria das qualidades do homem. Não se pode afirmar que não existam atributos de indivíduos humanos cuja distribuição discorde da curva normal, mas, na realidade, existem muito poucos que não se conformam com ela e para fins práticos podemos admitir que a curva normal é uma boa primeira aproximação para representar os fatos reais.

As razões práticas desempenham papel importante nesta questão. Alguns problemas admitem uma solução, seja qual fôr a distribuição, mas, enquanto que no caso da distribuição normal a solução é relativamente simples, nos casos gerais oferece dificuldades quasi insuperaveis. A diferença é tal que equivale a dizer que não existe uma solução geral. A hipótese de uma distribuição normal nos capacita a colher informações que nos tornariam possivel ver o problema sob uma nova luz.

Não levantaremos objeção contra o uso da curva normal, que já provou a sua utilidade em muitos casos, ao tratar de distribuições que não sabemos ao certo se são ou não normais. Tentar usar uma hipótese, que já provou previamente o seu valor, em campos onde ainda não foi experimentada, é uma maneira de proceder autorizada pelas regras da indução. Deve haver, entretanto, uma semelhança entre o campo experimentado e o não experimentado. É duvidoso que exista tal semelhança se tentarmos, partindo da distribuição normal dos atributos somáticos nos indivíduos humanos, tirar conclusões quanto à distribuição das suas qualidades mentais e intelectuais.

Pearson tenta aplicar essa hipótese a um material não muito extenso, relativo à inteligencia dos escolares da Suecia, medida pela escala de Binet. Os resultados não concordam muito bem com a hipótese de uma distribuição normal. Parece que seria razoavel parar aqui, mas Pearson argumenta que esta falta de acôrdo entre resultados observados e calculados é devida a uma falha na aplicação dos testes. Na realidade, trata-se aqui da mesma espécie de erro cometido por Quételet ao explicar as irregularidades dos seus resultados atribuindo-os a fraudes praticados pelos oficiais do recrutamento.

Parece que Pearson, no inicio da sua carreira, atribuia uma espécie de realidade metafísica à curva normal. Para ele, nessa época, a distribuição normal era a regra. Uma assimetria ou qualquer outro desvio da curva normal era atribuido à falta de homogeneidade do material. Uma classe dessa espécie é uma mistura de duas ou mais classes simples de distribuição normal. Daí resulta o problema de representar uma dada distribuição assimétrica como a soma de duas ou mais curvas normais. Este problema algébrico tem vários pontos bastante técnicos e é mais facil explica-lo por meio de um exemplo.

Temos um grupo de homens de 20 anos; metade é constituida por noruegueses e a outra metade por japoneses. Em ambos os subgrupos a distribuição é normal, mas a altura dos noruegueses é consideravelmente maior que a dos japoneses, e a curva resultante apresentará duas modas bem pronunciadas. Suponhamos agora que a proporção dos dois subgrupos é diferente e que somente 5% dos homens pertencem à raça mais alta. A curva resultante tem somente um máximo bastante pronunciado, mas é assimétrica, pois o seu declive é mais lento por causa da presença de um certo número de indivíduos altos.

Pearson usou com êxito este raciocinio no seu trabalho biométrico. Havia duas amostras de uma certa espécie de caranguejos, uma colhida em Plymouth e outra na baia de Napoles. Mediram-se a largura e o comprimento dos animais e verificou-se que a distribuição dos caranguejos de Plymouth era simétrica, ao passo que a dos caranguejos de Napoles era assimétrica. Pearson analisou esta última amostra e verificou que essa distribuição assimétrica podia ser muito bem representada como a soma de duas curvas normais. Se é verdade que cada curva normal define um tipo ou espécie particular, devemos concluir que os caranguejos colhidos na baia de Napoles pertenciam a duas espécies diferentes que deviam ser separadas. Tal material é uma mistura de tipos e deve ser separado nos seus elementos. Pearson aplicou o seu método à amostra de Plymouth e verificou que a distribuição não podia ser resolvida na soma de duas curvas normais. Este material, portanto, é considerado como homogêneo. Essas verificações poderiam ser interpretadas da seguinte fórma: os caranguejos de Napoles começaram a variar e os de Plymouth não.

O problema de analisar uma dada distribuição dividindo-a em um certo número de curvas normais, levanos involuntariamente a pensar em um problema semelhante no campo da acústica. O som é produzido pela vibração do ar e qualquer vibração dada pode ser analisada e dividida em somas de vibrações simples, tais como as que produz um diapasão. Um som de uma certa altura é produzido por uma vibração de frequencia correspondente e esta frequencia é a mesma, seja qual fôr o instrumento produtor do som. Alem desta vibração basica, ha vibrações secundárias, cujas frequencias são múltiplos daquela. Estas vibrações produzem os chamados harmônicos que são diferentes para cada instrumento e que nos permitem reconhecer o instrumento pelo qual o som foi produzido. Os harmônicos são facilmente identificaveis com auxilio dos ressoadores, esferas de metal das quais foi cortado um segmento e que possuem um dispositivo para ser adaptado ao ouvido; as ondas sonoras penetram pelo espaço aberto. Um ressoador responde somente a um som de determinada altura. Colocando-o ao ouvido, ao ser produzido o som correspondente, este é fortemente reforçado.

A semelhança formal entre a análise das ondas sonoras, reduzindo-as a uma soma de vibrações simples e o método de Pearson de analisar a distribuição reduzindo-a à soma de curvas normais, é obvia. Existe, entretanto, uma diferença prática. Podemos demonstrar a existencia física de ondas sonoras simples por meio dos ressoadores, mas não existe um método por meio do qual possamos distinguir os individuos pertencentes aos diferentes tipos. Não devemos nos satisfazer com a constatação de que a amostra apresenta uma mistura de tipos, queremos separa-los. Quando os tipos diferem tanto quanto no exemplo dos noruegueses e japoneses, a separação das duas classes não é dificil, pois os individuos das duas classes diferem não somente quanto à altura física, mas tambem em relação a muitos outros atributos, como por exemplo a côr do cabelo e dos olhos. A distinção é muito mais dificil no caso de uma espécie que começou a variar e na qual, talvez, os efeitos da variação sejam percebidos nas alterações obtidas por um único atributo.

Existe um argumento bastante sutíl que prova a importancia do fato de que uma dada distribuição pode ser analisada e reduzida à soma de curvas normais. Qualquer curva comum pode ser representada como a soma de certas funções simples, mas a fórmula da curva normal não pertence a este grupo. Se uma dada distribuição pode ser representada como a soma de curvas normais, devemos concluir que este resultado tem significação objetiva e que se trata de uma mistura de tipos. Ao tentar realmente solucionar um problema desta espécie, é preciso acautelar-se contra muitas ciladas, como por exemplo o grau de aproximação que a nossa amostra justifica e o número de tipos necessário para explicar a distribuição observada.

A prova de que uma amostra apresenta uma mistura de tipos é laboriosa e o seu êxito está longe de ser seguro. Aventuramo-nos a iniciar tal empreendimento somente quando temos alguma razão para suspeitar que a definição da classe que pretendemos investigar não é precisa, pois então a distribuição deverá ser assimétrica.

A assimetria da distribuição, por si só, não é prova da existencia de uma mistura de tipos. Devemos abordar o estudo da distribuição de uma classe empírica sem quaisquer ideias preconcebidas, e aceitar as conclusões tais como são. No capítulo seguinte explicaremos algumas das conclusões sugeridas pelo fato de que uma classe empírica apresenta uma distribuição normal.

9) **As observações de Lexis** — Devemos começar a discussão da teoria de Lexis observando que no seu material os resultados da observação e dos cálculos concordam muito bem, ao passo que nos dados concernentes aos mesmos fatos, obtidos por outros investigadores, o acôrdo não é tão perfeito. Nos seus estudos sobre a mortalidade humana, Lexis observou que o número de pessoas falecidas apresenta um máximo nas vizinhanças de setenta anos, e pergunta se a idade em que é mais provavel morrer tem o valor de um tipo. Primeiro determinou a idade para a qual o número de falecimentos é o máximo. Alem dessa idade, o número de falecimentos decresce gradualmente até zero, de uma maneira que faz lembrar uma das partes descendentes da curva normal. A quantidade que caracteriza o decréscimo é encontrada da mesma maneira que em qualquer outra distribuição normal.

A distribuição das idades alem do máximo aproxima-se muito da distribuição normal, mas para as classes mais jovens este acôrdo é encontrado somente nas vizinhanças do máximo e depois desaparece completamente. As idades mais elevadas mostram o processo típico de desaparecimento de uma geração, ao passo que nas classes mais jovens esta regularidade é encoberta pela morte prematura. Podemos interpretar esses fatos no sentido de que uma vida de 70 anos aproximadamente, é típica para os organismos humanos. Influencias externas causam o desaparecimento de muitos indivíduos antes desta idade, mas quando um indivíduo alcançou esta idade ou aproximou-se suficientemente dela, a duração da vida depende quasi que exclusivamente do grupo de condições representado pelo seu organismo. O organismo de cada indivíduo é constituido de maneira a durar um certo tempo e a idade correspondente será realmente atingida se o indivíduo escapar aos perigos da morte prematura. Ao atribuir uma certa duração de vida a cada indivíduo, a natureza segue um certo tipo e os desvios deste tipo apresentam uma distribuição normal. O organismo humano é um instrumento que trabalhará por um certo tempo, da mesma fórma que uma lâmpada elétrica é fabricada para produzir luz durante um certo número de horas. O processo pelo qual as lâmpadas são fabricadas é calculado de maneira a dar-lhes uma certa duração util, embora circunstancias casuais possam aumentar ou diminuir esse período. A duração da vida que um indivíduo atingirá, se não fôr eliminado por influencias externas, depende de um grupo de condições tão constante quanto as que se observam no experimento da prancha de Galton ("Galton's board").

Lexis explica os fatos estatísticos da mortalidade infantil, da morte prematura e da morte típica por meio do que pode ser chamado um modelo mecânico. Por mortalidade infantil designamos o terrivel fato de que uma alta percentagem das crianças morre no decorrer dos primeiros dois ou tres anos de vida. Os modelos mecânicos dessa espécie servem não somente para fins didáticos, mas esclarecem tambem as nossas ideias sobre o fenômeno que pretendemos compreender.

Um indivíduo atira bolas sobre um alvo fixado no solo a uma distancia de 70 pés mais ou menos. As bolas param nos pontos em que tocam o solo. Algumas delas alcançarão o alvo, enquanto que outras virão colocar-se antes ou depois dele, e em uma série longa de provas, lances de dada magnitude se distribuirão normalmente de tal fórma que o máximo da distribuição coincidirá com o alvo. Os lances errados se aglomerarão mais ou menos densamente ao redor do alvo conforme a habilidade da pessoa que atira as bolas.

Uma parte consideravel das bolas é defeituosa e inadequada para o lance, por ser, por exemplo, leve demais. Essas bolas não são atiradas ao alvo: o jogador se limita a abandona-las, a alguns pés do lugar em que está. Essas bolas representam as crianças que nascem fracas e não teem possibilidade de sobreviver.

Uma outra pessoa se coloca entre o jogador e o alvo, e tenta apanhar as bolas no ar. Coloca-as no lugar em que foram apanhadas. Entre 15 e 40 pés, o número de bolas apanhadas para cada pé do solo é mais ou menos o mesmo, ou aumenta lentamente. Alem de 40 pés o número de bolas apanhadas vai gradualmente decrescendo, de maneira que mais bolas terminam a sua trajetória sem interrupção. De 45 pés em diante, a interferencia com o trajeto das bolas diminue rapidamente, e apartir de 60 pés desaparece quasi completamente.

Após muitos milhares de provas, teremos o seguinte resultado. Um número consideravel de bolas estará no chão a alguns pés do ponto em que iniciaram a sua trajetória. As bolas apanhadas no ar formam um grupo denso no inicio, mas que desaparece quasi completamente de uma distancia de 60 pés para diante. As bolas que terminam a trajetória sem interrupção formam uma distribuição normal.

Esses tres grupos representam a mortalidade infantil, a morte prematura e a morte normal. As bolas que foram simplesmente postas de lado representam as crianças que nasceram com uma constituição fraca ou defeituosa. A pessoa que apanha as bolas no ar representa os perigos aos quais os adultos estão expostos no decorrer da vida. Para os homens, são os perigos das profissões, e para as mulheres os perigos da maternidade e a fadiga proveniente das tarefas diárias. O enfraquecimento do organismo com a idade e o esforço de ganhar a vida, aumentam as possibilidades de morte até uma certa idade. Uma pessoa que escapou desses perigos, está mais ou menos a salvo de destruição por influencias externas. A partir de uma certa idade, que Lexis situa ao redor de 60 anos, o indivíduo quasi não é ameaçado por perigos externos e o seu organismo é entregue às forças naturais de destruição.

Lexis devotou muito tempo e energia a estas investigações. As condições nas quais o organismo humano é produzido mostram uma uniformidade que tende a produzir um tipo, e a duração da vida é um dos atributos típicos. A mortalidade típica é uma consequencia da duração típica da vida. Todos os indivíduos humanos entram na existencia com um organismo predestinado para uma certa duração de vida e depende do acaso ser ou não destruido antes de alcançar esse limite.

Pearson atacou este problema analisando a curva observada da mortalidade e reduzindo-a a curvas correspondentes às suas fórmulas. Distingue a mortalidade da velhice, da meia idade, da juventude e da infancia. Nesta inclue a mortalidade prenatal. As dificuldades técnicas deste problema são muito grandes e, provavelmente, não podem ser resolvidas sem algumas suposições mais ou menos arbitrárias.

10) Um exemplo extraido da estatística escolar — Um modelo mecânico auxilia a compreensão e oferece uma imagem vívida da interação dos diferentes fatores. Serve para fins didáticos, mas não aos da investigação. Queremos explicar o uso de tais modelos com um exemplo extraido da estatística relativa à idade dos escolares.

A idade em que uma criança deve entrar na escola é fixada por lei e a mesma lei estabelece que a educação da criança deve continuar até uma outra idade. A distribuição das idades nos graus inferiores é acentuadamente assimétrica, apresentando-se o decréscimo da curva muito mais lento que a sua ascenção. Ao número das crianças que entram na escola soma-se o daquelas que não foram promovidas. As curvas sobem rapidamente até um máximo e caem rapidamente de inicio, depois cada vez mais lentamente. Esta assismetria diminue gradualmente em relação às classes mais adiantadas e desaparece quasi completamente nos últimos graus.

O número de alunos nos graus mais adiantados diminue, o que pode ser observado na representação gráfica destas distribuições, uma vez que as áreas abrangidas, pelas curvas se tornam menores. Este fato é perfeitamente nítido nas estatísticas escolares americanas. Esta diminuição do número de alunos nos graus mais adiantados é devida somente em grau muito pequeno à mortalidade. A razão principal é que as crianças são tiradas da escola, em contravenção à lei. Essa diminuição representa um sério problema para o educador e muitas medidas teem sido sugeridas para conservar as crianças na escola. O êxito dessas medidas é relativo, pois os indivíduos que se encontram sob pesada pressão econômica transgridem com muita habilidade a lei.

Podemos visualizar esses fatos imaginando que um certo número de bolas são postas em movimento com a mesma velocidade inicial em um meio resistente. São todas de igual tamanho e da idêntica constituição física, mas diferem apenas no peso. A quantidade de energia com que as bolas partem não é a mesma, e à medida que a energia é consumida pela resistencia do meio, as velocidades se tornam diferentes.

Dividimos o intervalo total ao longo do qual se movem as bolas em um certo número de intervalos iguais, oito, por exemplo. As bolas não partem do mesmo ponto, mas em caso nenhum se situa este ponto a uma distancia maior que seis ou sete intervalos a partir da extremidade inferior do primeiro intervalo. O movimento das bolas é regulado de fórma que deverão entrar no primeiro intervalo em um certo momento. O número de bolas que penetram no primeiro intervalo permanece constante ou varia muito lentamente. Imaginamos que uma pessoa apanha algumas destas bolas, de maneira que são retiradas e escapam à observação.

Contamos as bolas encontradas em cada um desses oito intervalos e ordenamo-las de acôrdo com a duração do tempo que levaram se deslocando. Alguns intervalos estão tão distantes que as bolas cujo peso não atinge uma certa magnitude não podem alcança-los. Se o peso das bolas fôr distribuido simetricamente ao redor da média, a distribuição nessas classes será tambem simétrica. Nos intervalos inferiores deverá haver assimetria, pois as novas bolas são somadas às que foram retardadas.

A pessoa que apanha as bolas no caminho representa as influencias ilegais que removem as crianças da escola antes da idade determinada. A resistencia do meio representa as exigencias do trabalho escolar que a criança tem que satisfazer. O peso desigual das bolas representa a capacidade mental com que a criança inicia a sua carreira. A magnitude dos intervalos corresponde à duração do ano escolar e o tempo durante o qual a bola se move, representa a idade da criança.

O sistema educacional de cada país é resultado de um desenvolvimento histórico e, em todos os paises que usufruem um alto nivel cultural, adapta-se à capacidade e às necessidades do povo. É conveniente dar às crianças tanta instrução quanto fôr possivel e estabelecer altos padrões para promoção ao grau seguinte, mas não adianta tornar esses padrões tão altos que somente as crianças excepcionalmente dotadas possam alcança-los O estudo da distribuição das idades dos alunos nos diversos graus sugere uma resposta à questão de saber se as exigencias da escola estão bem adaptadas às capacidades dos alunos.

Em primeiro lugar precisamos exigir que o número de crianças que são tiradas da escola em contravenção à lei seja tão pequeno quanto possivel. Um idealista insistiria em que tais casos não deviam absolutamente acontecer, mas o estatístico conhece a impossibilidade prática de forçar o cumprimento da lei que determina que todas as crianças de determinada idade frequentem a escola. Nos paises onde não existe imigração, o número de alunos das classes mais adiantadas decresce necessariamente, pois algumas crianças desaparecem por razões naturais ou outras, inevitaveis. A mortalidade nesses grupos inferiores de idade é pequena e a diminuição das crianças nos graus mais adiantados não será consideravel. Isto ficará demonstrado pelo fato de que as curvas de distribuição construidas com base na mesma escala cobrirão áreas aproximadamente iguais.

As instruções distribuidas pelo governo aos professores estabelecem um mínimo de aproveitamento que a criança precisa demonstrar para que possa ser promovida ao grau seguinte. A experiencia mostra que estas instruções não são interpretadas da mesma maneira em todas as escolas, e cada uma produz um tipo proprio. O programa é, para o aluno, alguma coisa dada, mas o professor determina o tipo de acôrdo com os seus pontos de vista proprios. O professor, ao interpretar o programa, escolhe o tipo que pretende produzir. Esta escolha não é necessariamente consciente, pois muitos professores seguem simplesmente as instruções que lhes são dadas, mas aqueles que teem experiencia e um vivo interese pela sua profissão, teem pontos de vista bem definidos quanto ao que se julgam com direito de esperar dos seus alunos.

O educador, que estabelece os programas e as finalidades gerais da instrução em um sistema de escolas, tem que escolher o tipo que pretende produzir. Precisa esclarecer o que será exigido dos alunos que terminarem o curso, e deve ter uma ideia da inteligencia média e de outras capacidades mentais que pode esperar encontrar nos alunos que frequentarão a escola. O programa deve ser estabelecido de maneira que o objetivo da instrução seja atingido dentro do tempo prescrito pelo maior número possivel de crianças, de maneira típica. O tipo é produzido gradualmente e se apresenta somente no último grau. O tipo deve ser atingido quando a criança termina o curso e isto implica que a distribuição das idades é assimétrica em todos os graus e normal somente para o grupo de crianças que termina o curso. O número de alunos deve diminuir nos graus mais adiantados, porque os que não forem capazes de terminar o programa no tempo prescrito são postos de lado. Se as normas de promoção forem excessivamente rígidas, um número excesivo de alunos deixará de terminar o curso. O ideal seria que a área da curva normal dos alunos que teminam o curso fosse tão grande quanto possivel, pois nesse caso a produção do tipo exigiria um número de sacrificios tão pequeno quanto possivel.

11) **Da noção de tipo** — A palavra "tipo" pertence ao grupo de palavras livremente usadas, mas de dificil definição. Tem um sentido preciso quando a palavra "típico" é usada no sentido de "característico" e se refere a um atributo cuja presença prova que um objeto pertence a uma certa classe. Assim o médico diz que um sintoma é típico de uma certa doença quando a sua presença prova que o doente sofre dessa molestia. A palavra designa um atributo constitutivo dos membros de uma classe.

A estatística atribue um sentido preciso às palavras "tipo" e "típico"; referem-se ao atributo quantitativo A, pelo qual os elementos da classe empírica M podem ser ordenados e dar uma distribuição normal. Nesta definição, é esencial que o atributo A seja quantitativo. Podemos levantar a seguinte questão: se A é típico de M, existem outros atributos pelos quais os indivíduos pertencentes a M possam ser ordenados e apresentar uma distribuição normal?

Sentimo-nos inclinados a dar uma resposta positiva, porque os atributos de um indivíduo são correlacionados e parece plausivel que as condições que produzem um tipo em relação a A produzam tambem distribuições normais, relativamente a atributos relacionados com A. Lembrem-se do exemplo da idade típica para terminar o curso escolar. Parece razoavel supôr que essas crianças mostrarão tambem pesos e alturas típicos se tomarmos na devida consideração os sexos respectivos. A questão de saber se esse peso e altura típicos existem, é uma questão de fato e deve ser estabelecida pela experiencia, não pela matemática. A dificuldade consiste em colher os dados necessários, não em escrever longas fórmulas.

Encontrar tipos estatísticos é um trabalho eminentemente técnico que não pode ser empreendido por qualquer um. Usamos tambem essa palavra para as imagens mentais que surgem em nós ao contemplar objetos que possuem certas semelhanças e são considerados como pertencendo a uma classe. Podemos chamar essas imagens tipos intuitivos. Originam-se em nós como resultado de processos psicológicos que podem ser investigados experimentalmente. Constituem um processo de abstração e procuram encontrar os atributos comuns a todos os individuos em observação. Toda a personalidade do observador entra neste processo, suas qualidades morais e intelectuais inclusive. Os atributos dos tipos intuitivos não são quantitativos e são frequentemente bastante vagos.

Consideremos o seguinte fato. Uma pessoa bem familiarizada com as escolas de S. Paulo conversa com um rapaz ou uma moça que terminou o curso ha alguns anos. Uma curta palestra a tornará capaz de formar uma opinião sobre a escola que esse aluno frequentou, e o seu julgamento tem muitas probabilidades de ser correto. Esta opinião não se baseia na estatística, mas no conhecimento íntimo dos métodos de instrução seguidos nas diversas escolas. O valor desta opinião depende inteiramente da inteligencia, da experiencia, e do carater da pessoa em questão. Menciono o carater porque nas observações desta espécie nem sempre é facil seguir as regras da amostragem representativa e aceitar todos os casos como se apresentam, mesmo quando contradizem uma opinião previamente formada.

Não existem regras específicas que garantam o êxito. Quando desejamos abstrair um tipo da observação de um grupo de indivíduos, o nosso espírito deve estar livre de qualquer influencia externa. Este principio geral deixa um campo excessivo à individualidade do observador, e muitas vezes acontece que duas pessoas derivam tipos diferentes do mesmo material, e é impossivel conciliar os pontos de vista conflitantes. Tais fracassos, bem como os abusos aos quais o uso dos tipos intuitivos se presta, levam-nos a pôr em dúvida a utilidade desta noção e muitos autores insistem em bani-la dos estudos sérios. A isto devemos replicar que o espírito humano produz a noção de tipo espontaneamente quando temos que lidar com uma pluralidade de objetos que apresentam certas semelhanças e certas diferenças. A utilidade desta noção é melhor compreendida quando tratamos de atributos mais tangiveis que a estrutura mental dos escolares.

Suponhamos que temos que descrever a fórma do femur direito de adultos do sexo masculino. Do ponto de vista da geometria, trata-se de uma superficie que é descrita pelas suas constantes características. Colhendo as medidas para uma amostra de tamanho suficiente, obtemos a descrição da classe empírica "Femur de adultos do sexo masculino". Esta maneira de proceder, tão simples e direta na aparencia, é inaplicavel neste caso e mesmo a descrição de um único indivíduo está fóra de cogitação em razão do grande número de medidas requeridas. Este objeto que a natureza produz de acôrdo com um modelo imutavel, mas com detalhes infinitamente variaveis, não pode ser descrito atualmente pela geometria. Seja lá o que fôr que nos proporcione o futuro, hoje não podemos abordar esse problema numericamente.

A descrição do femur, com base em uma série suficientemente grande desses ossos, é obtida da seguinte maneira. Pede-se a uma pessoa versada em osteologia que fórme uma imagem mental do femur dos adultos do sexo masculino e a interprete por meio de uma descrição verbal e um ou mais desenhos. O êxito desta maneira de proceder é garantido e quem quer que seja que se tenha familiarizado com a descrição prontamente reconhecerá se um osso corresponde à descrição, isto é, se é um elemento da classe "femur de adulto do sexo masculino". Um osso particular poderia ser escolhido como representativo do grupo todo, e a sua fotografia, aliada às explicações verbais necessárias, podem ser usadas para dar ao leitor a imagem do femur que o investigador formou para si mesmo. Série nenhuma de tabelas numéricas poderia satisfazer essa finalidade.

12) **Classes empíricas de distribuição estavel** — A distribuição de uma espécie que não varia permanece constante e não se altera. Quando a espécie varia, a sua distribuição varia tambem e amostras colhidas em épocas diferentes não apresentam idêntica distribuição. Qualquer afirmação relativa à estabilidade ou variabilidade de uma espécie deve ser baseada em uma serie de amostras representativas, colhidas em épocas diferentes. Uma só amostra, por mais extensa que seja, não é suficiente para resolver esse problema e uma afirmação relativa à estabilidade ou variabilidade de um classe empírica precisa basear-se em provas positivas. A melhor prova é uma série de amostras colhidas em ocasiões diversas.

Amostras colhidas ao mesmo tempo em uma classe empírica, apresentam distribuições levemente diferentes devido às variações casuais que o teorema de Bernouilli nos ensina a esperar. Quando as amostras são colhidas em épocas diferentes, temos que resolver se as diferenças observadas nas distribuições são devidas ao acaso ou se indicam uma mudança na constituição da classe que se investiga. As provas, no primeiro caso, indicam uma classe estavel, invariavel. Ha métodos matemáticos apropriados para guiar a nossa decisão quanto a esse ponto importante.

Muitas espécies zoológicas são exemplos de classes invariaveis de distribuições estaveis. Vamos lançar mão do chamado tempo de reação acústica para uma discussão um pouco mais minuciosa do assunto. Nestes exprerimentos, mede-se o tempo que uma pessoa gasta para responder a um estímulo acústico. A resposta é a mais simples possivel e consiste em levantar um dedo que comprime uma tecla, a qual liga uma corrente elétrica, que estava fechada no momento em que o som foi produzido. O intervalo entre a interrupção e a reabertura da corrente é o tempo de reação, que pode ser medido de várias maneiras, por meio de um cronoscópio, por exemplo.

A duração do tempo de reação depende de vários fatores, dos quais os mais importantes são: a) a natureza do estímulo ao qual o organismo tem que responder, e b) o estado mental do sujeito. A reação ao som é mais rápida; a reação à luz vem em segundo lugar. A atenção do sujeito é o fator mais importante, pois causa as maiores variações na duração da reação. Vem a seguir o ajustamento dos musculos, que devem estar prontos para desencadear imediatamente a reação. A reação é a mais simples que se possa imaginar, mas é preciso algum tempo para que o sujeito encontre um ajustamento apropriado para cada experimento. O sujeito tem que descobrir, por si mesmo, a disposição mental apropriada e, regra geral, as instruções pouco adiantam. Em breve o sujeito percebe se, em um dado experimento, adotou ou não a disposição mental apropriada. Se não o fez deve mencionar o fato e o experimento não será tomado em consideração.

O tempo de reação pode ser medido sem dificuldade, com aproximação de um milésimo de segundo. Uma série preliminar familiariza o sujeito com a tarefa e então podem ser iniciados os experimentos a serem registrados, os quais são geralmente realizados em grupos de 200. Os resultados dos primeiros grupos dispersam-se ao longo de um intervalo surpreendentemente grande. Com o aumento da prática, o tempo de reação torna-se menor, o que é indicado pela diminuição das medias. A prática tem ainda o efeito de reduzir o tamanho do intervalo sobre o qual se distribuem os resultados. Ha vários meios de medir a dispersão, como o desvio padrão, por exemplo. Eventualmente, atinge-se um estágio em que nem a media nem o desvio padrão apresentam quasi variações e temos então o que se pode chamar tempo de reação acústica com prática completa. Cada grupo de 200 experimentos constitue uma amostra representativa desta classe empírica, cujos elementos são os resultados dos experimentos individuais.

A distribuição do tempo de reação acústica com prática completa é quasi simétrica e não difere muito da distribuição normal. Em outras classes empíricas a distribuição difere essencialmente da normal e a sua fórma tem que ser determinada pela observação. Passaremos a mostrar agora as conclusões que podem ser tiradas do fato de ter uma classe empírica uma distribuição estavel que não muda com o tempo. A dedução completa pode ser encontrada no meu livro sobre o cálculo de probabilidade, mas apresentarei aqui a direção geral da argumentação, sem empregar símbolos matemáticos.

Um objeto que é um elemento da classe empírica C deve possuir os atributos pelos quais essa classe é definida. Esses atributos definem um grupo de condições das quais depende o atributo quantitativo A, que estamos investigando. O número dessas condições é consideravel no caso de todas as classes que encontramos na biologia e na psicologia.

No jargão da matemática empregamos a palavra "variavel", para designar "condição", e "infinito" para substituir "muito grande", de maneira que o simples fato indicado acima é expresso pela sentença mais ou menos rebarbativa: O atributo A de um elemento da classe C depende de um número infinito de variaveis.

A segunda suposição é igualmente simples e diz que nenhuma das variaveis tem influencia preponderante sobre o atributo A. Esta condição se verifica em todos os casos em que coligimos dados estatísticos para fins de investigação. Quando um fator tem tendencia a produzir elementos que possuem valores muito altos ou muito baixos do atributo A, a definição da classe C precisa ser corrigida, e a influência desse fator deve ser investigada. Uma situação semelhante a essa surgiu no estudo do tempo de reação. O sujeito pode concentrar sua atenção mais no ouvido ou mais no dedo que deverá levantar. O tempo de reação é levemente diferente conforme a atenção é dirigida primariamente ao estímulo iminente ou ao movimento a ser executado, e as instruções dadas ao sujeito devem tornar bem claro qual das duas atitudes deve ele tomar.

A terceira suposição afirma que todas as variaveis devem ficar confinadas dentro de certos intervalos, de extensão finita. Esta suposição é realizada em todas as investigações que versam sobre organismos vivos. Tomemos como exemplo a classe: "peso de um recem-nascido". Esse peso depende de grande número de condições, como por exemplo a temperatura do corpo materno. Essa temperatura varia, mas não pode exceder certos limites sob pena de destruir a vida do feto. Em relação a todos os outros fatores prevalecem condições semelhantes.

A quarta e última condição é que o atributo A seja uma função analítica das variaveis. Não existe uma razão especial que possa servir de base a essa suposição; assim, devemos apoiar-nos nas considerações apresentadas em um dos capítulos anteriores, e que explicam por que usamos exclusivamente funções analíticas na descrição dos fenômenos da natureza.

Se essas suposições forem admitidas, poderemos mostrar que qualquer distribuição pode ser representada por uma curva que é sempre positiva e que, em ambas as extremidades, aproxima-se assimptoticamente do valor zero. A última parte desta afirmação significa que, nas observações reais, nenhum elemento da classe C é encontrado fora de um dado intervalo dos valores do atributo A. Nesse intervalo, a curva que representa a distribuição pode ter qualquer fórma imaginavel. Introduzindo novas suposições, obtemos curvas com um único ápice, de ambos os lados do qual a curva desce simétrica ou assimetricamente, e eventualmente podemos levar a especialização tão longe a ponto de obter a tão conhecida curva normal de distribuição.

A função T e as suas propriedades apresentam um interesse particular para o estudioso de lógica. Dá a relação entre os atributos A e possue, portanto, os característicos de uma lei natural. Esta função é diferente para cada classe empírica e nos é desconhecida, mas a existência de uma distribuição estavel, o que pode ser demonstrado como um fato empírico, leva inevitavelmente à conclusão de que essa função T existe. Provar a estabilidade da distribuição de uma classe equivale a provar que cada elemento da classe deve sua existência a um processo que é determinado com exclusividade pelas condições existentes e tem o carater de uma lei natural.

Os atributos que definem uma classe empírica de distribuição estavel, formam um grupo que determina certos outros atributos não contidos explicitamente na definição da classe. As condições sob as quais um objeto da classe "crianças recem-nascidas" passa a existir, determinam tambem o peso que observamos na realidade, embora esse atributo não esteja contido na definição. A definição de uma classe empírica implica as condições sob as quais um elemento da classe passa a existir, embora essa implicação, presentemente, nos seja desconhecida. Se a função T fosse conhecida, compreenderiamos essa relação e poderiamos determinar o intervalo além do qual nenhum elemento da classe pode ser encontrado.

A função T indica a dependencia dos atributos dos elementos da classe relativamente às condições sob as quais um elemento da classe se origina, e tem o carater de uma lei natural. Os elementos de uma classe empírica de distribuição estavel são casos especiais de uma lei natural, no mesmo sentido em que o movimento da terra ao redor do sol é um caso especial da lei da gravitação. Descrever esse movimento mediante a indicação da posição da terra em momentos diferentes e evitando qualquer referencia ao princípio da gravitação, corresponde mais ou menos à descrição de uma espécie botânica ou zoológica. Se a função T fosse conhecida, poderiamos dar uma descrição completa da espécie em questão. Como esse não é o caso, temos que nos satisfazer com a descrição habitual dos espécimes pertencentes a uma espécie.

Consideremos a função T pertencente à classe empírica C de distribuição estavel. A função T determina os atributos que podem ser encontrados juntos e dá uma regra de coexistência. Determina as propriedades dos elementos de C da mesma fórma que uma lei física determina todos os processos aos quais se aplica. A função matemática é a noção geral que compreende as regularidades dos processos tanto orgânicos como inorgânicos.

As leis do mundo orgânico são logicamente equivalentes às do mundo inorgânico. Não ha necessidade de introduzir um princípio formativo ("form giving") para descrever os fenômenos naturais, como faz Platão com sua doutrina das idéias e Aristóteles com a sua teoria da enteléquia. As regularidades da natureza devem ser compreendidas em termos puramente lógicos. A função T é o princípio formativo da natureza. Descreve o processo pelo qual um indivíduo pertencente a uma classe empírica de distribuição estavel passa a existir e toma fórma. Cada indivíduo que pertence a uma classe desse tipo representa um caso da lei natural expressa pela função T ou, para usar uma conhecida expressão metafórica, fórma parte de T.

CAPITULO IX

TEORIA DOS ERROS DE OBSERVAÇÃO

1) A limitada precisão da mensuração — As quantidades empíricas não são bem definidas e temos liberdade de escolher nossas definições da maneira que melhor se adaptem às nossas finalidades. Qual é a distância entre S. Paulo e Rio de Janeiro? O viajante comum indicará a extensão da linha de estrada de ferro entre as estações das duas cidades. O automobilista indicará a extensão de estrada entre um ponto convenientemente escolhido em S. Paulo e um ponto correspondente, no Rio. O aviador mencionará a distância aérea entre os dois aeródromos. Uma pessoa de espírito muito preciso, tomará a distância geográfica entre dois pontos semelhantes, como por exemplo os observatórios astronómicos, cuja posição geográfica é conhecida com a maior exatidão possivel atualmente. Essas respostas se referem a quatro coisas completamente diferentes e não é de admirar que os valores numéricos dados por essas quatro pessoas absolutamente não concordem. Não será de surpreender tambem que o automobilista venha a sentir-se seriamente decepcionado se calcular, com base na latitude e longitude dos dois observatórios, a distancia que terá de viajar e a gasolina necessária para isso.

A mensuração real nunca constitue um fim em si mesma; o número atribuido a uma quantidade empírica tem que servir um determinado objetivo. Medimos as coisas que nos interessam e começamos por definir o que pretendemos compreender por meio do número obtido pela mensuração, número esse que chamamos, com um certo humor inconsciente, o "valor real" da quantidade. Esta definição é arbitrária e em alguns casos altamente artificial, como se pode depreender do seguinte exemplo.

Vamos definir a distância entre duas cidades como a distância entre seus respectivos aeródromos. Estes são sempre campos muito grandes, e a definição não decide onde se deverão situar o começo e o fim da linha. Escolhendo de maneira conveniente o ponto de partida e o de chegada, podemos facilmente aumentar ou diminuir de um quilómetro ou mais a distância. Se o aeroplano não decola nem aterrissa sempre nos mesmos pontos dos aerórromos, a distância entre A e B pode ser diferente da distância entre B e A e esse fato não coincide com o que aprendemos na escola. Existe também a possibilidade de definir o ponto de partida como a média de todos os pontos dos quais o aeroplano decolou. Isto leva a uma fórmula imponente porque contém uma dupla integral. Infelizmente, leva a consequências que não agradam ao bom senso. Por exemplo, se o aeródromo fôr aumentado, a posição desse ponto teórico de partida muda, e a distância entre as duas cidades muda também. Após todos esses fracassos, chegamos à conclusão de que a melhor coisa a fazer é escolher arbitrariamente um ponto em cada aeródromo e medir a distância entre eles.

As diferenças que resultam de uma definição melhor da distância são pequenas e podemos despreza-las como insignificantes para as nossas finalidades. Do número obtido para representar essa distância podemos tirar certas conclusões, como, por exemplo, a quantidade de combustivel e lubrificante necessária para a viajem, e uma diferença de um quilómetro ou dois não tem importância. Um número mais exato não nos levaria a alterar a quantidade de gasolina. Se os nossos objetivos mudarem, e passarem a exigir maior precisão, o começo e o fim da linha a ser medida terão que ser definidos de maneira mais exata, mas serão sempre marcos visiveis e nunca poderão ser pontos matemáticos ideais. Esta falta de precisão na definição de quantidades empíricas exclue a possibilidade de vir jamais a obter uma medida absolutamente exata.

O passo seguinte consiste em organizar uma série de observações por meio das quais se possa encontrar o número que atribuiremos à quantidade como seu valor real. A precisão do resultado depende da técnica de mensuração e da qualidade dos instrumentos empregados, os quais são constantemente aperfeiçoados e variam para cada campo de observação. A determinação do meridiano de Paris é com justiça considerada uma das obras primas da mensuração topográfica. A linha passa por um ponto marcado no centro do portão sul do observatório astronómico e vai alcançar uma pequena haste vertical de aço, firmemente embutida em uma coluna de pedra no parque Mont Souris. Comparado com a exatidão obtida nas oficinas mecânicas, onde se procura e consegue alcançar uma precisão de milésimo de polegada, este trabalho parece rudimentar. A sua precisão seria também inteiramente insuficiente nos trabalhos de ótica, onde as distâncias são medidas em comprimento de ondas luminosas.

A exatidão da mensuração parece estar relacionada de qualquer fórma à menor diferença perceptivel entre duas quantidades. Diz-se que um instrumento é mais sensivel quando se torna capaz de acusar diferenças que antes passavam despercebidas. Uma indicação geral do grau de exatidão que se pretende alcançar já é dado pela unidade de mensuração empregada. Propomo-nos agora a tarefa de esclarecer a relação existente entre a precisão da mensuração e a menor diferença perceptivel. Na mensuração física, os sentidos do observador são auxiliados por instrumentos que aumentam a precisão da sua percepção sensorial. A psicofísica nos ensina a medir a sensibilidade dos orgãos dos sentidos sem o auxilio de instrumentos, e mostraremos que a sensibilidade, nas condições especiais da mensuração empírica admite uma determinação semelhante. A sensibilidade do observador e a dos instrumentos que usa formam um conjunto. A sensibilidade ótica de dois observadores pode ser apenas levemente diferente, mas se um deles usar instrumentos melhores, os seus resultados terão mais alto grau de precisão. Os resultados respectivos dos dois observadores manterão entre si relação idêntica à que apresentariam se tivessem sido obtidos com orgãos dos sentidos de sensibilidade diferente.

2) **Desacordo entre observações repetidas** — Observações repetidas da mesma quantidade empírica não produzem o mesmo resultado, se as nossas exigências quanto à exatidão não forem excessivamente reduzidas. No trabalho científico, geralmente insistimos na regra de que cada resultado seja tão preciso quanto permitam os instrumentos de que dispomos. Esta regra, excelente no caso da ciência, não se aplica, contudo, ao campo dos objetivos práticos. No setor dos negocios, muitas vezes é importante que a repetição de uma medida dê exatamente o mesmo resultado. Isso pode ser conseguido se se definir a quantidade de maneira apropriada e se tomar uma unidade de medida suficientemente grande.

No comércio, as controversias relativas a pesos e medidas são dispendiosas e a fidelidade dos valores é de importância primordial. A mensuração será praticamente inutil para fins comerciais se houver a menor suspeita de que uma repetição da medida poderá não dar os mesmos resultados. Essa exigência é facilmente satisfeita quando se trata de mercadorias não muito valorizadas. Reduzimos nosas exigências quanto à exatidão e damos o resultado com uma margem maior que a diferença provavel. É uma espécie de seguro contra a possibilidade de uma desavença.

O seguinte exemplo data da primeira guerra mundial. A unidade de medida usada pela Austria no comercio atacadista de tecidos era a "peça" que, conforme a qualidade, representava 35 a 55ms. O tecido era enrolado na fábrica, mas medido somente na ocasião da venda, de maneira que mesmo peças do mesmo tecido não tinham o mesmo comprimento. As peças eram medidas com uma vara de um metro de comprimento, dividida em centímetros e decímetros. O comprimento do tecido era dado em metros e decímetros. As frações de decímetro, qualquer que fosse o seu tamanho, eram desprezadas. A precisão de um decímetro é facilmente mantida em mensurações desse gênero e somente um erro muito grosseiro pode produzir uma diferença maior entre a medida do vendedor e a do comprador. Quando se negociavam grandes quantidades de tecido, os comprimentos das peças eram somados.

Durante a guerra, o governo comprou grandes quantidades de tecido e frequentemente fazia encomendas de 100.000ms. ou mais. Só excepcionalmente se verificava uma diferença entre a medida obtida pelo funcionário do governo e a mencionada na lista do vendedor, mas esse acôrdo não prova o valor desse processo de mensuração. O resultado apresenta uma vaga relação com o que o físico chamaria o comprimento real do tecido. O comprador sempre recebe mais fazenda do que a que pagou, mas o vendedor está disposto a aceitar esse prejuizo afim de evitar uma desavença. Os resultados concordam porque não se faz esforço algum para aproximar a medida da precisão que poderia ser alcançada se se medisse com mais cuidado. O comprimento medido é 100kms. ou mais; se um agrimensor quizesse medir essa distância com precisão suficiente para garantir que uma repetição da medida daria o mesmo resultado dentro da margem de um decímetro, teria que usar instrumentos da mais alta precisão e uma turma de auxiliares especializados.

Este exemplo mostra que o acôrdo completo em materia de resultados numéricos não constitue prova da alta qualidade de um processo de mensuração. Medidas repetidas da mesma quantidade não dão resultados idênticos, a não ser que as possibilidades de desacôrdo sejam excluidas por meio de uma disposição artificial. Na realidade, quando os resultados concordam muito bem o grupo de medidas se torna suspeito.

3) **Ajustamento das observações** — Completa concordância entre os resultados numéricos da mensuração podem ser obtidos se esses valores forem atribuidos com precisão muito menor que a garantida pelos instrumentos. Este processo baseia-se no princípio de que pretendemos ter certeza dos valores que encontramos e que só consideramos perfeitamente seguros os valores em relação aos quais concordam todas as observações. Este processo se recomenda pela absoluta segurança dos resultados: nenhum dos valores pode ser posto em dúvida pelo fato de estar em contradição com algumas das observações. Entretanto, é uma aplicação por demais rígida do princípio: "Segurança antes de tudo" para ser realmente util no ajustamento de uma série de observações. Os dados autorizam-nos a ir um pouco além dos limites do absolutamente certo e formar uma opinião quanto ao valor provavel da quantidade medida.

Suponhamos que se tenha medido quatro vezes o comprimento de uma linha, usando uma regua milimetrada com um Vernier, obtendo os seguintes resultados: 549,6; 550,2; 550,3 e 549,4mm. Podemos argumentar que estes dados concordam em relação aos dois primeiros números, e que o comprimento da linha é 55cms., e que uma aproximação maior não passará de adivinhação.

Se possuissemos o resultado de uma única mensuração, não hesitariamos em dar o resultado, aproximação até 1/10 de milímetro, que o Vernier garante. Parece estranho que a combinação de quatro medidas desse somente a aproximação de um centímetro. Parece um esforço inutil usar o Vernier, uma vez que um resultado igualmente fidedigno pode ser obtido com uma régua comum.

O problema de ajustar as observações surge somente quando se trata de boas observações e desejamos tirar delas o máximo possivel. As quatro observações foram feitas sob as mesmas condições, com o mesmo cuidado e são igualmente dignas de confiança. As observações tomadas em conjunto definem o valor que temos de atribuir à quantidade, e todas as observações devem ter a mesma influência. O problema do ajustamento não surge enquanto se trata de observações de baixa precisão. São exatamente as mensurações mais precisas — às quais dispensamos mais cuidados, tempo e dinheiro — que dão resultados discordantes. A precisão limitada das nossas medidas causa as contradições entre observações repetidas e isto leva ao problema de afastar essas contradições por meio de um processo que a) seja aplicavel a qualquer série de dados e b) leve a um resultado determinado de maneira exclusiva. Diante de uma série de resultados dada, não deve subsistir nenhuma dúvida quanto ao valor a ser atribuido à quantidade. Um processo que satisfaz essas exigências é chamado: método de ajustamento.

4) **O metodo dos minimos quadrados** — O processo mais frequentemente usado para ajustar observações é o método dos mínimos quadrados. Esse nome nos deixa um pouco intrigados e não é perfeitamente correto. Para ser completo, deveria ser: método das menores somas dos quadrados dos desvios, mas seria muito comprido e o uso do nome abreviado já está muito arraigado para ser mudado. Hoje esse método é usado em todos os campos onde se fazem mensurações numéricas e quando se fala da teoria dos erros de observações, quais sempre se quer dizer o método dos mínimos quadrados. Tal identidade, entretanto, não existe na realidade, pois possuimos outros métodos de ajustamento, alguns dos quais usam métodos gráficos para determinar o valor desconhecido com base em uma dada série de observações.

O método dos mínimos quadrados é uma série de proposições que serve para a solução de cinco problemas fundamentais da teoria dos erros de observação. As provas das fórmulas são faceis, contanto que se conheçam bem os princípios. Afim de evitar essas dificuldades, é melhor formular esses cinco problemas fundamentais de maneira que se refiram à determinação empírica de probabilidades desconhecidas. A solução dos problemas assim formulados deve ser encontrada no teorema de Bernouilli e nenhuma outra solução é aceitavel. O método dos mínimos quadrados é um sistema de proposições abstratas e situa-se no mesmo nivel que qualquer outro grupo de proposições do cálculo de probabilidade. Se quizermos usar o método dos mínimos quadrados na teoria dos erros de observações, precisamos mostrar que as suposições do cálculo de probabilidade são realizadas nos nossos processos de mensuração.

A primeira aparição do método dos mínimos quadrados foi um "Coup de théatre". Perdeu-se de vista uma estrela e não se conseguia encontra-la novamente. No primeiro dia do século XIX, Piazzi, em Palermo, viu uma estrela que não era idêntica a nenhuma das estrelas conhecidas. Fizeram-se algumas observações antes que a estrela desaparecesse, mas não foram suficientes para determinar-lhe a órbita com os meios matemáticos de que dispunham os astrónomos no inicio do século dezenove. O método dos mínimos quadrados — invenção nova nessa época — resolveu o problema e a "stella perfuga" — a estrela fugida — foi prontamente localizada no lugar calculado pelo novo método. Este sucesso estabeleceu a reputação do método dos mínimos quadrados na astronomia. Outros êxitos, menos espetaculares mas igualmente convincentes, seguiram-se e o método dos mínimos quadrados em breve tornou-se o processo padrão para eliminar erros de observação em mensurações de alta precisão. Após a astronomia, adotaram-no a geodesia e a física.

Não se deve supor que a historia do método dos mínimos quadrados tenha sido uma sucessão de triunfos. Teve suas dificuldades e conheceu fracassos, mesmo quando manipulado pelas mãos mais competentes. Esses fracassos foram devidos ao excesso de confiança e à falta de cautela no julgar as premissas. Ambos os fatores podem ser claramente vistos na seguinte anedota. Newton calculou a massa de Jupiter usando as observações de Pound sobre as dístancias dos satélites desse planeta. Concluiu que essa massa era 0,00093721 da massa do sol. Laplace, após longos cálculos, encontrou para essa fração o valor de 0,00093427, e afirmou que se poderia apostar 1.000.000 de francos contra um que o erro desse número, para mais ou para menos, não seria maior que um por cento, o que significa que essa fração deve situar-se entre 0,00092493 e 0,00094261. Seria um erro arriscar um cruzeiro apostando na exatidão desse número. Mais tarde, observou-se que as perturbações dos pequenos planetas e do cometa de Encke indicavam um valor mais elevado e os dados de Airy mostraram que a massa de Jupiter é 0,00095357, número esse que cai fóra do intervalo indicado por Laplace. Os seus cálculos estavam corretos, mas ele superestimou o valor dos dados de que dispunha.

É possivel que a pasmosa precisão com que se localizou a "stella perfuga" fosse em grande parte uma questão de sorte, mas não subsiste dúvida quanto ao êxito do método quando se trata de resolver os problemas para cuja solução foi inventado. Esse êxito levou muita gente a experimenta-lo em outros campos, sem investigar se existiam ou não as condições necessárias para a sua aplicação. Esse método pressupõe que os erros seguem a lei normal de distribuição. Esta condição é necessária. A distribuição de muitas classes empíricas que encontramos na psicologia e na biologia não é normal e a aplicação do método dos mínimos quadrados ao estudo dessas classes pode levar a resultados incorretos. — Esse fato foi logo percebido e alardeado em altas vozes.

As críticas tornaram-se inflamadas e verificou-se que existia uma forte oposição que se conservara muda até então. Essa oposição silenciosa, provavelmente, existira desde o início. Muitos argumentos foram apresentados, mas a verdadeira razão é que o método dos mínimos quadrados exige consideravel trabalho numérico e o esforço não estará em proporção com o resultado obtido senão quando os dados da observação forem muito bons. A manipulação do método dos mínimos quadrados, antes do advento da máquina da calcular, era privilegio de um pequeno grupo de pessoas que possuiam um interesse natural pelos números, bem como o dom de manipulá-los com facilidade. Alguns dos problemas abordados exigiam cálculos extraordinariamente extensos e as suas soluções estabeleciam recordes não muito diferentes dos recordes de levantamento de pesos. A gente admira a proeza, mas fica satisfeito por não ser obrigado a realiza-la também.

O advento da máquina de calcular alterou completamente a situação. A extensão dos cálculos não tem mais importância alguma e assim estamos em situação de considerar calmamente os méritos do método. Não é um processo mágico, por meio do qual se obteem bons resultados com base em más observações, mas permite-nos julgar a qualidade dos dados e auxilia-nos a tirar deles tudo que podem dar. Atualmente, os grandes institutos de ensino da estatística, como por exemplo o da Universidade da Carolina do Norte, exigem que os seus estudantes façam um curso muito sério sobre o método dos mínimos quadrados. Para os estatísticos, não está mais na moda falar desse método em tom despiciente, como faziam alguns livros de estatística impressos na década de 1920.

O que nos interessa é a significação dos resultados obtidos por essa fórma, e por essa razão precisamos falar brevemente sobre os argumentos apresentados por diferentes autores afim de provar a exatidão do método dos mínimos quadrados.

5) **O argumento de Legendre** — Na ordem cronológica, Legendre é o primeiro na lista dos brilhantes matemáticos que escreveram sobre os fundamentos do método dos mínimos quadrados. Legendre insiste que o processo de cálculo usado para ajustar observações discordantes deve ser aplicavel a qualquer série de dados, e deve levar a um valor determinado de maneira exclusiva. O número desses processos é infinito e Legendre justifica a sua escolha deste método particular argumentando que "não ha principio mais geral ou mais exato, nem de aplicação mais simples que o ajustamento das medidas pela regra de que a soma dos quadrados dos desvios dos valores observados deve ser tão pequena quanto possivel."

É dificil aceitar sem reservas esse raciocinio. A simplicidade e facilidade no cálculo não é argumento em uma investigação que visa uma exposição correta dos fatos. A quantidade de trabalho envolvida no cômputo não tem importancia alguma em uma investigação desse gênero, pois de boa vontade aceitamos qualquer processo, por mais complicado e laborioso que seja, desde que garanta o resultado correto. Tait mostra a irrelevância do argumento de Legendre imaginando um investigador que apresentasse a atração como inversamente proporcional à distância de dois corpos, porque o problema de saber como um número indefinido de corpos se comporta sob a influência da atração — o chamado problema dos n corpos — admite, neste caso, uma solução simples e exata, o que não acontece se a atração fôr inversamente proporcional ao quadrado da distância. Simplicidade é uma consideração secundária mesmo no trabalho prático, pois se os cálculos necessários forem excessivamente longos e complicados, poderemos inventar processos mais simples, que se aproximem bastante do valor correto, contanto que se saiba qual é esse valor.

A afirmação de Legendre de que não existe processo mais geral nem mais exato será gratuita enquanto não fôr fundamentada em razões que, ao que parece, são impossiveis de encontrar. Qualquer processo que nos permita encontrar um valor determinado de maneira exclusiva a partir de uma dada série de dados e seguindo uma sucessão de passos precisamente definidos, situa-se no mesmo nivel de generalidade. A questão da exatidão dos resultados obtidos não pode ser resolvida até que se declare o que queremos dizer por exatidão e como se deve medi-la.

6) **Gauss e o método dos mínimos quadrados** — Nenhum nome está mais intimamente ligado ao método dos mínimos quadrados que o de Gauss. Ele o inventou quando era, cronologicamente, um menino; devotou-lhe o seu pensamento da idade madura e manteve esse interesse até na velhice. Essa maneira de ajustar observações discordantes parecia-lhe tão obvia que atribuia pequena importancia à sua invenção e tinha certeza de que outros astrónomos já o teriam usado antes dele. A sua primeira dedução do método dos mínimos quadrados é encontrada na sua "Theoria Motus Corporum Coelestium", onde parte da hipótese de que a media aritmética de uma série de observações discordantes é o valor mais provavel da quantidade desconhecida. Baseia esta suposição no fato de que é prática comum tomar a media aritmética como a melhor determinação no caso das observações diretas. Esse processo, argumenta ele, é equivalente à suposição de que a media aritmética deve ser preferida a qualquer outro valor, o que significa que é a melhor determinação da quantidade medida. Desta hipótese, ele deduz, por meio de uma série de conclusões rigorosas, as regras para tratamento das observações indiretas, nas quais se trata de várias quantidades desconhecidas, que não podem ser observadas separadamente. Essa série de regras é chamada: método dos mínimos

quadrados e em seguida mostra que pela aplicação dessas regras a qualquer série de observações discordantes, obtemos os valores mais provaveis das quantidades desconhecidas. Podemos exprimir esses fatos dizendo que Gauss, na "Theoria Motus", deduz o método dos mínimos quadrados como o processo que corresponde à prática comumente seguida na mensuração real. Considera como dado o processo prático seguido pelos astrónomos e agrimensores, e tira suas conclusões sem nada lhe acrescentar.

O principio da media aritmética parece uma suposição obvia e natural. Mas poucos dentre os investigadores que estudaram a teoria dos erros de observação não partiram da esperança de provar essa suposição com base em principios gerais. Existe uma certa similaridade entre o principio da media aritmética e o axioma das paralelas na geometria: para quem não refletiu profundamente sobre ele, o principio da media aritmética parece perfeitamente claro; somente quando se percebem as suposições que esse principio implica é que se sente a necessidade de encontrar uma prova ou de basear a teoria dos erros de observação sobre outros fundamentos.

O principio da media aritmética não pode ser defendido por argumentos se fôr postulado como um axioma. Gauss não ficou satisfeito com a sua dedução e procurou substituir o principio da media aritmética por algum outro axioma. Introduziu uma quantidade, chamada o **erro medio**, que é essencialmente positiva, pois não faz diferença se a nossa medida ficou aquém ou além do valor real. A maneira mais simples é definir o erro medio como a soma dos quadrados dos desvios e Gauss postula que o erro medio deve ser tão pequeno quanto possivel. A mensuração é considerada como uma especie de jogo no qual só podemos perder; essa perda iminente é o erro medio. Partindo do postulado de que o erro medio deve ser tão pequeno quanto possivel, podemos deduzir todas as proposições do método dos mínimos quadrados.

Esta dedução também é arbitraria, pois o erro medio pode ser definido por várias outras fórmas. Não é de admirar também que dê o mesmo resultado que o princípio da media aritmética. Existe uma proposição de que a media aritmética torna a soma dos quadrados dos desvios tão pequena quanto possivel, de maneira que postular que o erro medio deve ser mínimo é apenas outra fórma de postular que a media aritmética é a melhor determinação da quantidade a ser medida.

7) **O método dos mínimos quadrados como um sistema abstrato** — Poucos problemas da ciência teem sido distinguidos pelas contribuições de tantos dentre os mais profundos e mais claros pensadores como a teoria dos erros de observação. Foi objeto de muitas investigações e verificou-se que o método dos mínimos quadrados pode ser deduzido de várias séries de suposições, mas em todos os casos faz-se necessária uma suposição que não pode ser deduzida de axiomas puramente matemáticos. Não necessitamos exatamente do principio da media aritmética, mas não podemos arrumar-nos sem uma proposição que lhe equivale. Dois ou mais grupos de proposições que levam às mesmas conclusões são logicamente equivalentes e não possuimos meios lógicos para escolher entre eles. Temos que considerar a sua significação filosófica, isto é, a maneira pela qual concordam com os demais pontos de vista.

O principio da media aritmética pode ser substituido por várias outras proposições; todas elas servem para a dedução do método dos mínimos quadrados. Cada processo tem as suas vantagens, mas todos são prejudicados pela arbitrariedade de escolha dos axiomas. Para deduzir o método dos mínimos quadrados, precisamos de uma proposição ou de algumas proposições que não tenham carater puramente matemático. Elaborar uma série de postulados é uma prova de potência lógica que não está ao alcance de qualquer um. O resultado é particularmente interessante quando mostra que uma proposição anteriormente considerada como indispensavel, pode ser abandonada. Assim mostrou Schimmack que a função que representa a distribuição dos erros não precisa ter todas as propriedades das funções analíticas. Não é necessário que esta função possua uma derivada. Essas investigações são importantes, mas na realidade não aumentam a nossa compreensão da importancia dos postulados. Desejamos conhecer fatos aos quais se refere o principio da media aritmética, e queremos compreender a importancia do número pelo qual medimos a precisão das medidas.

É evidente que a noção indicada pelas palavras "exatidão" e "precisão" não pertence à matemática pura. Esta noção se relaciona ao que chamamos, em psicologia, sensibilidade. Refere-se às diferenças que somos capazes de perceber em uma quantidade. Quanto menor essa diferença, maior a precisão das medidas. Dizer que medimos a exatidão da mensuração pela menor diferença que podemos observar ou pela maior diferença que escapa à percepção é quasi, mas não perfeitamente, a mesma coisa. Essas quantidades são usadas para medir a sensibilidade na psicofísica, e já se elaboram vários métodos para medi-las.

É um pouco mais dificil perceber que qualquer processo de mensuração implica a definição dos valores que devem ser atribuidos à quantidade medida. Esse valor nunca é encontrado imediatamente, mas é sempre obtido como resultado de um processo sistemático. A mensuração não é um ato de percepção simples, mas sim compósito. Começa com a descrição das condições sob as quais as medidas devem ser tomadas — condições essas às vezes muito complicadas. Depois a quantidade desconhecida é comparada com uma série de valores conhecidos — a escala de medida — até que se encontre um valor que o observador julgue igual à quantidade desconhecida. Cada medida é um compósito de um certo número de comparações, nas quais a quantidade desconhecida é comparada com quantidades conhecidas. O valor que é considerado igual à quantidade desconhecida é encontrado como resultado de várias observações nas quais se verificou que a quantidade a ser medida é diferente de um valor conhecido da escala de medida com o qual foi comparada.

A natureza compósita do processo de mensuração é reconhecida imediatamente no processo de pesar um corpo em uma balança. O objeto é comparado sucessivamente com pesos conhecidos até que se encontre um peso que a balança acusa como igual ao do objeto. Ao selecionar os valores da escala de medida, podemos escolher entre tomar alternadamente pesos muito grandes e muito pequenos, ou aproximar-nos do valor final tomando um peso maior ou menor e repetindo depois o processo na direção oposta.

É igualmente facil perceber que as observações astronômicas são atos compósitos. O acontecimento a ser observado é a coincidencia da estrela com o fio que indica o meridiano. O observador segue o curso da estrela no seu campo de visão e marca — ligando um contacto, por exemplo — o momento em que a estrela cruza o meridiano. O fato de que o observador não liga o contacto em um dado momento é equivalente ao julgamento de que a coincidencia da estrela com o meridiano ainda não se verificou.

Existe sempre uma regra definida para determinar o valor numérico que é atribuido à quantidade desconhecida. Não existe jamais um único valor nitidamente definido, que parece igual à quantidade medida, mas a relação de igualdade existe para todo um intervalo da escala de valores. Existe toda uma série de valores que, dentro das possibilidades das nossas percepções, parece igual à quantidade medida e temos que formular uma regra de acôrdo com a qual é escolhido o valor definitivo. Este intervalo pode ser maior ou menor, conforme a qualidade dos nossos instrumentos, mas nunca pode desaparecer devido à limitada precisão dos nossos instrumentos e dos nossos orgãos dos sentidos.

Adotamos a regra de considerar o centro desse intervalo como o resultado definitivo. Isto significa que os limites superior e inferior destes intervalos devem ser determinados e que a media aritmética dessas duas quantidades é o valor da quantidade desconhecida. Ha duas maneiras de determinar esses limites.

A primeira consiste em partir de dentro do intervalo e aproximar-se dos seus limites por meio de pequenos passos até que se perceba uma diferença. Podemos também aproximar-nos desses limites partindo de fóra do intervalo, e diminuindo ou aumentando os valores da escala de medidas. Partindo de um valor superior, o observador encontrará o maior valor que parece igual à quantidade desconhecida. Partindo de um valor inferior, encontrará o menor valor que é considerado igual à quantidade medida. Em algumas mensurações este processo é muito apressado e em outras só se pode aproximar do valor definitivo por um lado. Quando se trata de medir o comprimento de linhas, pesar em uma balança ou tomar várias outras medidas, o observador pode gastar o tempo que quizer e aproximar-se do resultado final por ambas as direções. Em todos esses casos, um observador cuidadoso facilmente nota que o valor definitivo é obtido em resultado de uma combinação de dois valores. O resultado final de cada mensuração individual é a media aritmética entre os limites superior e inferior do intervalo dentro do qual não se pode encontrar nenhuma diferença entre o valor da escala de medida e a quantidade desconhecida.

Restam duas questões a responder: 1) Qual é a significação do ponto situado no centro do intervalo de incerteza; 2) como podemos justificar o processo de tomar a media aritmética como sendo a melhor determinação da quantidade desconhecida. O ponto escolhido deve ter algumas propriedades que o distingam de todos os outros valores.

8) **Probabilidades na comparação de duas quantidades** — Se compararmos duas quantidades A e B, nosso julgamento pode ser: A é menor que B, A é maior que B ou não ha diferença perceptivel entre as duas quantidades e neste caso o nosso julgamento é de que A é igual a B. Deixemos que um observador compare várias vezes duas quantidades entre as quais existe uma pequena diferença. Não somente as condições físicas, mas também as que se devem à constituição psicofísica do sujeito são cuidadosamente conservadas constantes. O estado de espírito do observador é uma das condições decisivas e deve ser o mesmo em todos os experimentos. A única maneira de conseguir esse objetivo consiste em conservar o observador em completa ignorancia, não somente em relação à relação objetiva entre os dois estímulos, mas tambem quanto ao julgamento que já formulou anteriormente sobre o mesmo par de estímulos. A experiência mostra que os julgamentos do observador variam e não ha maneira de prever qual o julgamento que será formulado em um experimento particular. A comparação de duas quantidades é um acontecimento casual no sentido subjetivo do termo. Experimentos deste gênero exigem uma técnica complicada, que impede que o observador obtenha qualquer informação relativa às quantidades que tem de comparar. O julgamento deve ser formado exclusivamente com base nas sensações produzidas pelos dois estímulos.

Não podemos prever o resultado de tal experimento, embora cada experimento tenha que dar como resultado um dos tres julgamentos possiveis. Este é o caracter formal dos acontecimentos casuais de que trata o cálculo de probabilidades, cujo representante típico é a retirada de uma bola de uma urna que contém bolas brancas, pretas e vermelhas em proporções constantes. Existe a mesma ignorancia em relação ao resultado de cada retirada. A questão é saber se o ato de formular um juizo ao comparar duas quantidades tem o carater de um acontecimento casual de probabilidades constantes ou variaveis.

O grupo de condições das quais depende a probabilidade de tidar uma bola branca, preta ou vermelha é dado pelo número de bolas de cada côr. As condições não mudam enquanto o conteúdo da urna fôr o mesmo para cada retirada. O grupo de condições é imediatamente dado e tangivel. O grupo de condições do qual dependem as probabilidades os tres julgamentos não é igualmente bem definido e não é diretamente controlavel. Desejamos basear os nossos pontos de vista sobre dados objetivos e não nos satisfaz apenas indicar o fato puramente subjetivo de que os experimentos foram executados com o maior cuidado. Os nossos pontos de vista quanto à constancia ou variabilidade das condições deve ser baseado nas frequencias observadas dos tres julgamentos. Dividimos as observações em séries parciais e comparamos as frequencias dos julgamentos com as das séries totais. As frequencias observadas nas séries parciais não serão iguais, mas as diferenças devem estar de acôrdo com o teorema de Bernouilli. Existe uma certa quantidade conhecida pelo nome de **Coeficiente de Divergência** que se mostra util no seguinte caso: quando o coeficiente de divergência não difere muito da unidade, podemos supor que as probabilidades dos tres julgamentos não mudaram no decurso dos experimentos.

Discutiremos agora uma série de experimentos nos quais um observador comparou um peso de 100 gramas com pesos de 84, 88, 92, 96, 100, 104 e 108 gramas. Os pesos eram cilindros ocos de cobre, com 7,5cms. de diâmetro e 3cms. de altura, fechados em uma das extremidades, de maneira que o seu peso podia facilmente ser ajustado ao que se desejava. A superficie era polida de fórma a dar a mesma impressão ao tacto, onde quer que fosse tocada. As diferenças de temperatura foram evitadas não se permitindo que o observador tocasse um peso com maior frequência que os outros. Os pesos foram dispostos, em intervalos regulares, ao longo da borda de uma mesa redonda giratória. Havia 7 pares de pesos, sendo o primeiro sempre o padrão de 100grs. O braço do observador apoiava-se sobre uma mesa e o peso a ser levantado era colocado na posição apropriada por meio de um pequeno movimento da mesa giratoria.

O levantamento se fazia exclusivamente com o pulso; nenhuma parte do braço acima do pulso se movia. Os movimentos da mão eram regulados por um metrônomo que batia 92 vezes por minuto. O processo de levantar o peso era o mesmo em todos os experimentos. Um anteparo impedia que o observador visse a mesa giratoria com os pesos e assim a única maneira de que dispunha para formar o seu julgamento eram as sensações produzidas pelo movimento da mão ao levantar o peso. O observador proferia os julgamentos: menor, igual e maior e fez 450 experimentos com cada um dos 7 pares, o que dá um total de 3.150.

A TABELA 1 contem os resultados de 9 séries de 50 experimentos consecutivos. Os dados justificam o ponto de vista de que a comparação de duas quantidades é um acontecimento casual. Embora as condições, tanto objetivas como subjetivas tenham sido controladas com o máximo cuidado, e apesar das diferenças consideraveis entre os dois pesos, não houve um só par que fosse considerado sempre da mesma maneira. As frequências dos tres julgamentos para o mesmo par de estímulos varia de maneira absolutamente imprevisivel. Estes dados servem para calcular o coeficiente de divergência para os tres julgamentos relativamente aos sete pares de estímulos. Para os **coeficientes de divergência** foram obtidos os seguintes valores:

peso para comparação	mais pesado	igual	mais leve
84	0,891	1,178	1,097
88	0,891	0,740	0,630
92	1,389	0,849	0,951
96	0,761	1,148	0,900
100	1,410	1,304	1,322
104	2,216	1,270	2,222
108	0,955	0,864	1,372

Com exceção dos dados relativos ao peso de 104grs., esses números pouco diferem da unidade. As medias dos coeficientes de divergência para os julgamentos maior, igual, mais leve, são 1,216, 1,050 e 1,213. Se abandonarmos os resultados relativos ao peso de 104grs., essas medias serão: 1,049, 1,014, 1,045. Não ha dúvida quanto à dispersão normal no caso dos pesos de 84, 88,

TABELA 1

Séries	84			88			92			96			100			104			108		
	Mais pesado	Igual	Mais leve	Mais pesado	Igual	Mais leve	Mais pesado	Igual	Mais leve	Mais pesado	Igual	Mais leve	Mais pesado	Igual	Mais leve	Mais pesado	Igual	Mais leve	Mais pesado	Igual	Mais leve
1	1	3	46	1	4	45	4	9	37	11	10	29	22	17	11	31	7	12	47	3	0
2	3	0	47	0	7	43	6	8	36	13	13	24	22	17	11	35	8	7	42	6	2
3	1	0	49	0	6	44	2	7	41	15	12	23	29	9	12	43	1	6	45	5	0
4	2	5	43	2	3	45	10	7	33	17	10	23	24	13	13	38	3	9	47	3	0
5	0	1	49	1	8	41	8	8	34	17	10	23	25	13	12	39	5	6	42	6	2
6	0	2	48	1	6	43	3	12	35	15	14	21	21	9	20	47	2	1	46	1	3
7	1	3	46	3	6	41	4	10	36	16	15	19	27	14	9	48	2	0	45	5	0
8	1	4	45	1	7	42	3	14	33	11	11	18	34	11	5	43	7	0	46	4	0
9	1	2	47	2	4	44	10	10	30	17	11	82	34	5	11	43	5	2	47	3	0

92, 96, 100 e 108grs. Mesmo que se incluam os resultados para o peso de 104 grs., a media dos coeficientes de divergência para os tres julgamentos não contradizem o ponto de vista de que se trata de dispersões normais e de probabilidades constantes.

Formar um juizo ao comparar dois estímulos é um acontecimento casual de probabilidade matemática constante. Depende de um grupo de condições que permanecem constantes da mesma fórma que as probabilidades de tirar bolas brancas, pretas ou vermelhas depende de um grupo constante de condições, se, após cada retirada, a bola fôr posta novamente na urna. A constituição psicofísica do observador e as condições físicas do experimento determinam a formação do julgamento da mesma maneira que o conteudo da urna determina o resultado das observações. Os acontecimentos dependem de um grupo de condições que permanecem aproximadamente constantes.

As frequências relativas obtidas nestes experimentos podem ser consideradas como determinações empíricas das probabilidades desconhecidas com que são proferidos os julgamentos mais leve, igual e mais pesado, quando se compara um peso padrão de 100grs. com pesos de 84, 88, 92, 96, 100, 104 e 108grs. O teorema de Bernouilli diz que essas determinações são afetadas por erros que mostram uma distribuição normal. Eis aqui as determinações mais provaveis dessas probabilidades.

peso para comparação	mais pesado	igual	mais leve
84	0.0222	0.0444	0.9333
88	0.0244	0.1133	0.8622
92	0.1111	0.1889	0.7000
96	0.2933	0.2578	0.4489
100	0.5289	0.2400	0.2311
104	0.8156	0.0889	0.0956
108	0.9044	0.0800	0.0156

9) **As funções psicométricas** — Consideremos experimentos em que dois estímulos X_1 e X_2 são compara-

dos sob condições constantes. As probabilidades dos tres julgamentos dependem desses estímulos, que consideramos como variaveis independentes. As probabilidades dos tres julgamentos são funções dessas variaveis que chamamos $F(X_1, X_2)$, $G(X_1, X_2)$, $H(X_1, X_2)$. Uma função que dá a probabilidade de um julgamento como dependente de uma ou mais variaveis, é chamada a função psicométrica desse julgamento. Essa função se refere a condições experimentais particulares e as probabilidades em questão podem mudar se as condições variarem. Uma vez dadas as funções psicométricas, é possivel calcular com antecipação os resultados de uma série de experimentos.

Para as nossas presentes finalidades, é importante o fato de que uma das quantidades de que depende a probabilidade, permanece constante. Nos experimentos em apreço, o peso padrão de 100grs. é comparado com uma série de outros pesos, um dos quais é igual ao padrão.

Para resolver na realidade o problema, precisamos conhecer não somente a natureza das funções F, G. H, mas tambem as constantes que nelas entram. Essas constantes são diferentes para cada sujeito e devem ser determinadas pela observação. A experiência mostra que as probabilidades de um certo julgamento para dois estímulos dados X_1 e X_3 variam para observadores diferentes, do que se segue que tambem as funções psicométricas devem variar. Deixaremos em aberto a questão de saber se uma e mesma expressão analítica é apropriada para representar a função psicométrica para todas as pessoas. As seguintes observações se fazem necessárias, relativamente às formulas adequadas para representar as funções psicométricas.

Diferenças grandes entre os estímulos X_1 e X_2 são sempre percebidas, mas é praticamente impossivel encontrar o ponto a partir do qual o observador profere sempre o mesmo julgamento. As probabilidades dos julgamentos maior e menor têm o valor um em intervalos infinitos, enquanto que as probabilidades dos dois outros julgamentos são iguais a zero. Não existem funções contínuas dessa espécie, e o cálculo se torna complicado se pusermos de lado a suposição da continuidade. Por esta razão escolhemos para as funções F e H, que se referem respectivamente aos julgamentos maior e menor, expressões analíticas que se aproximam dos valores zero e unidade assimptoticamente. A função G tem como assimptota o eixo X. Conveniência e facilidade de cálculo são as razões dessa suposição. Não ha diferença alguma entre dizer que um acontecimento tem uma probalidade infinitesimal cu dizer que ele jamais se dá.

Temos que levar em consideração também o fato de que as probabilidades do julgamento maior crescem quando cresce o valor do estímulo de comparação X_2. A curva que representa esta função sobe constantemente e aproxima-se assimptoticamente do valor um. Um raciocinio semelhante mostra que a curva que representa a função psicométrica do julgamento menor, cai constantemente entre os valores zero e um.

A probabilidade dos julgamentos de igualdade de inicio aumenta com os crescentes valores de X_2 até um certo máximo; daí por diante começa a cair, aproximando-se do valor zero.

A última condição a que se devem submeter as funções psicométricas é dada pelo fato de que a soma $F + G + H$ deve ser igual à unidade. Cada um dos experimentos deve resultar em um dos tres julgamentos que, portanto, são acontecimentos mutuamente exclusivos, dos quais um deve dar-se.

Essas tres condições não são suficientes para derivar fórmulas para as funções F, G, e H. Existe um número infinito de fórmulas que as satisfazem e que são, portanto, adequadas para representar as funções psicométricas. Afim de iniciar o trabalho, precisamos de uma fórmula e, atualmente, não dispomos de raciocinio matemático nem de fatos experimentais que nos guiem na escolha. Em uma das aulas anteriores fizemos referência a essa dificuldade fundamental no estudo das regularidades estatísticas. É melhor dizer francamente que admitir uma fórmula particular para representar as funções psicométricas é uma hipótese. Somos forçados a usá-la porque não podemos trabalhar sem uma fórmula e esperamos que a nossa hipótese resista à prova da experiência.

Não é dificil elaborar fórmulas que possam servir como hipóteses relativamente às funções psicométricas. De fato, existe um processo por meio do qual se pode encontrar inúmeras hipóteses adequadas. O valor de uma hipótese desse gênero se prova pela concordancia entre os resultados calculados pela fórmula e os dados da observação aos quais se aplica. O teorema de Bernouilli nos ensina que essa concordância é medida pela soma dos quadrados dos desvios entre os valores calculados e observados.

Uma fórmula que representa as funções psicométricas depende de um certo número de constantes que devem ser determinadas com base na observação. Essas observações são determinações empíricas de probabilidades desconhecidas e, como tais, são afetadas por erros que nos impedem de determinar exatamente as constantes. A precisão limitada na determinação das constantes resulta em uma falta de concordância entre os valores observados e os valores calculados, mesmo quando as nossas hipóteses relativamente às funções psicométricas são corretas. A falta de concordância entre os resultados do cálculo e da observação é devida à determinação incorreta das constantes, e nesse caso falamos de erros devidos à observação.

A limitada precisão das nossas observações não é a única origem da falta de acôrdo entre os valores calculados e observados. Quando as nossas fórmulas não representam realmente o curso das funções psicométricas, os resultados calculados e observados não podem concordar, mesmo que os dados estejam absolutamente exatos. A falta de acôrdo entre o cálculo e a observação, devida a uma hipótese incorreta sobre as funções psicométricas, pode ser chamada um defeito de teoria.

Não é possivel decidir se uma diferença dada entre resultados observados e calculados é devida a erros de observação ou a defeitos de teoria. Os erros de observação são inevitaveis e inextricavelmente emaranhados com os defeitos de teoria. Podemos julgar os méritos de diferentes hipóteses aplicando-as ao tratamento do mesmo material e decidir a favor daquela que der a menor soma dos quadrados dos desvios. Os erros de observação são os mesmos em todas as provas, e a fórmula que resultar na melhor concordância entre os cálculos e a observação é a que mais se aproxima da verdade.

Por esse processo sempre podemos decidir qual, dentre duas ou mais hipóteses, é a melhor em relação a uma dada série de observações, mas não podemos encontrar a fórmula que seja, de fórma absoluta, a melhor. Existe um número infinito de fórmulas que satisfazem as tres condições gerais, de maneira que não podemos excluir a possibilidade de que uma das expressões não experimentadas possa resultar em melhor acôrdo entre resultados calculados e observados. Essas investigações são laboriosas e não é de surpreender que até agora essa comparação só tenha sido feita em relação a duas hipóteses.

Confiamos nesse criterio formal somente quando não dispomos de mais nada que nos guie na escolha entre as várias fórmulas. Ha outros pontos que tomamos em consideração ao julgar os méritos de uma hipótese e alguns deles escapam à valorização numérica, como por exemplo o grau de complexidade da fórmula. A perspectiva é mais animadora em relação ao seguinte ponto: quando as somas dos quadrados dos desvios são as mesmas ou quasi para duas hipóteses diferentes, preferimos a fórmula que contem menor número de constantes. Uma fórmula é mais flexivel e pode ser mais facilmente ajustada a uma dada série de observações quando temos maior número de constantes à nossa disposição. Os estatísticos de Rothamstead e da Universidade da Carolina do Norte, discutindo problemas semelhantes, elaboraram a noção de "graus de liberdade", noção essa que se poderia mostrar util tambem neste caso. Mas não ficou muito claro como se deve formular essa noção de maneira que o termo "grau de liberdade" não seja apenas uma outra expressão para "número de constantes". Se a definição necessária estiver iminente, podemos postular que, outras coisas sendo iguais, deverá ser preferida a fórmula que ofereça maior grau de liberdade.

Não entraremos nas minúcias técnicas do ajustamento de uma fórmula a uma dada série de observações. Como leitura introdutoria recomendo o livro de Sir Godfrey H. Thomson: "The Essentials of Mental Measuremt" e "Psychometric Methods", de J. P. Guilford. O aluno que pretender aprofundar o estudo do problema e que seja suficientemente versado em matemática, deverá procurar os meus artigos sobre os métodos psicofísicos e o meu livro sobre o cálculo de probabilidade. O problema é complicado, como se pode ver do fato de que matemáticos de primeira ordem como H. Bruns e Emile Borel cometeram erros.

Foi encontrada um fórmula, conhecida pelo nome mais ou menos rebarbativo de "Phi-Gamma-Hypothesis", que resiste muito bem à prova da experiência. Tem a vantagem de ser padronizada, de maneira que os cálculos necessarios são relativamente curtos. É amplamente usada na psicofísica. Ajustando os dados de experimentos de comparação de pesos por meio dessa hipótese, obtemos os dados apresentados na seguinte tabela, nas colunas rubricadas "calculados". Os números das colunas rubricadas "desvios" dão as diferenças entre os valores calculados e observados.

Peso para comparação	mais pesado		igual		mais leve	
	calculado	desvio	calculado	desvio	calculado	desvio
84	0.0075	0.0147	0.0421	0.0023	0.9504	- 0 0171
88	0.0357	- 0.0113	0.1103	0.0030	0 8540	0.0082
92	0.1200	- 0.0089	0 2033	- 0.1144	0.6767	0 0233
96	0.2920	0.0013	0.2624	- 0 0046	0.4456	0.0033
100	0.5319	- 0.0030	0 2361	0.0039	0.2320	- 0.0009
104	0 7605	0.0551	0.1473	- 0.0583	0 0922	0 0034
108	0.9091	- 0.0047	0.0637	0.0163	0.0272	- 0.0116

A concordância entre os resultados dos cálculos e os da observação é satisfatória. A diferença é consideravel somente para o valor 104, relativamente aos julgamentos mais pesado e igual, para os quais o coeficiente de divergência é também grande. Se pusermos de lado esses dois dados, o acôrdo entre observação e cálculo é muito bom. Dos 21 desvios registrados, 10 são negativos e 11 positivos. A "Phi-Gamma-Hypothesis" presta ótimos serviços neste caso.

A Fig. 3 apresenta graficamente os dados. Mostra a constante queda da curva que representa as probabilidades dos julgamentos mais leve e a ininterrupta ascenção da curva dos julgamentos mais pesado. A curva que representa os julgamentos de igualdade apresenta um máximo próximo do centro do gráfico e cai de ambos os lados sem interrupção. A aproximação de zero é muito mais lenta que nas outras duas curvas. Resulta que as curvas para os julgamentos mais leve e mais pesado aproximam-se do valor da unidade mais vagarosamente do que do valor zero.

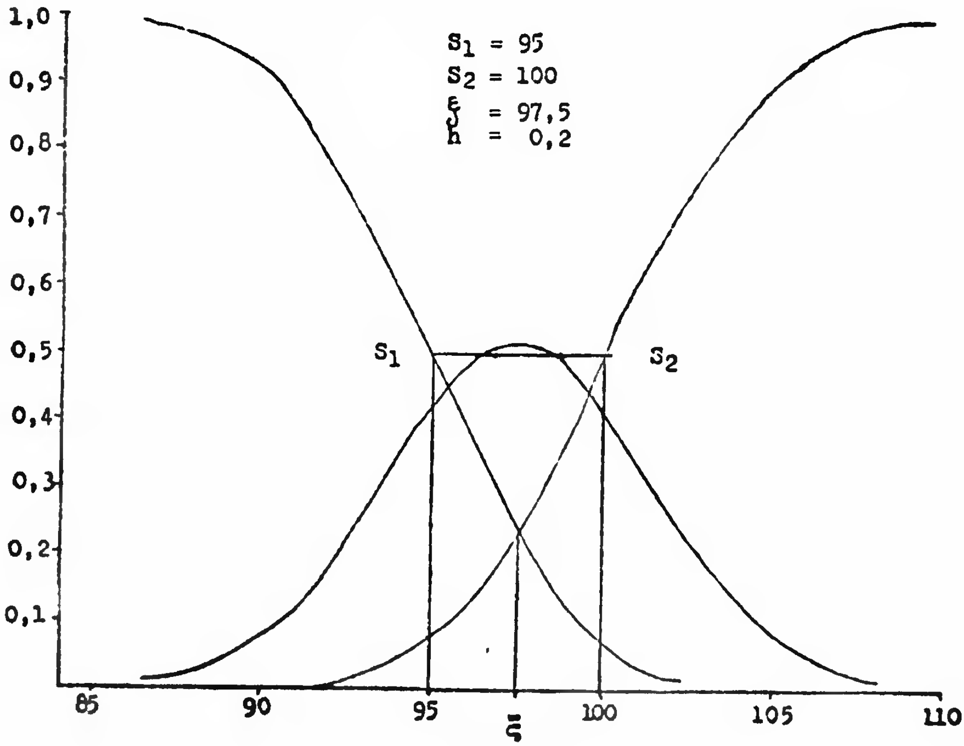

FIG. 3

As curvas que representam as probabilidades dos julgamentos mais leve e mais pesado são caracterizadas por dois fatores: as situações dos pontos S_1 e S_2 nos quais essas probabilidades são iguais a 1/2, e a rapidez da ascenção ou queda das curvas. Os pontos S_1 e S_2 determinam a posição e o último fator, a fórma das curvas. A rapidez da ascenção e da queda das curvas é dada por uma quantidade que é essencialmente positiva e que pode ter qualquer valor entre zero e o infinito. É costume designá-la pela letra **h**. Para os dados constantes da Tabela 1 o valor de **h** é cêrca de 0,1.

A diferença $S_2 — S_1$ é característica do observador e mede a sua sensibilidade. Fóra do intervalo $S_1 S_2$ um dos julgamentos tem uma probabilidade que excede o valor 1/2, enquanto que pode acontecer que dentro desse intervalo, nenhum dos julgamentos tenha uma probabilidade igual ou maior que 1/2, tal como acontece no caso dos experimentos que estamos discutindo. $S_1 S_2$ é chamado: intervalo de incerteza.

Empregamos a teoria das funções psicométricas somente enquanto necessária para a compreensão da teoria dos erros de observação. Por essa razão, devemos falar da diferença existente entre os resultados de observações, nas quais o observador é auxiliado por todos os modos posiveis, como no caso das mensurações físicas, e os resultados obtidos em experimentos nos quais o observador tem que confiar em um grupo estritamente limitado de sensações. No primeiro caso o coeficiente **h** é grande e as curvas diferem das que aparecem na Fig. 3, embora suas fórmulas matemáticas divirjam somente quanto ao valor das constantes que conteem. A Fig. 4 mostra as funções psicométricas, quando $\mathbf{h} = 1{,}0$ e $S_1 — S_2 = 6$. A inclinação das curvas AS_1B e CS_2D é íngreme e as curvas se aproximam rapidamente das suas assímptotas. Em consequência existe um intervalo — correspondendo grosseiramente a BC — no qual a probabilidade de um julgamento de igualdade pouco difere da unidade. Isto significa que em observações feitas sob condições favoraveis existe um intervalo de extensão finita no qual não podemos distinguir entre os dois estímulos. As quantidades que pertencem a este intervalo são consideradas como iguais à quantidade desconhecida. Nas mensurações feitas com finalidades científicas ou técnicas, lidamos exclusivamente com observações desse gênero.

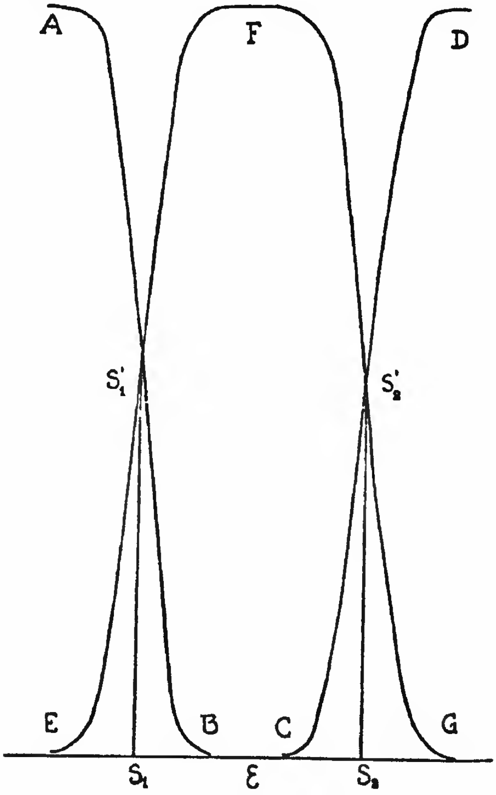

FIG. 4

10) O ponto de igualdade subjetiva — A igualdade de dois estímulos é um característico essencial das nossas impressões sensoriais, mas atribuir a uma quantidade um valor nitidamente definido é um ato complicado e até certo ponto artificial. Começaremos por provar a primeira parte desta proposição.

Um cão condicionado por Pavlov a um som de 1.000 vibrações por segundo, reagia a sons de altura levemente diferente. A secreção de saliva por parte deste cão é equivalente a um julgamento de igualdade proferido por um observador em um experimento psicométrico. O valor biológico da percepção de igualdade é tão grande quanto o da percepção da diferença. Orgãos dos sentidos que não fornecessem a percepção de igualdade não aumentariam as probabilidades de sobrevivência e seriam de valor biológico nulo. A relação de igualdade existia para todos os sons a uma certa distancia do padrão de 1.000 vibrações por segundo.

Consideremos agora a segunda parte da proposição. As curvas que representam as probabilidades dos julgamentos de igualdade estendem-se sobre um consideravel intervalo; e há para cada ponto dessa curva uma probabilidade finita de obter um julgamento de igualdade, se fôr comparado com o padrão. Precisamos de uma regra para definir o ponto que, dentro das possibilidades da percepção do observador, é igual ao padrão. Esse valor é chamado: ponto de igualdade subjetiva.

Podemos escolher a definição desse valor com toda a liberdade, mas precisamos ter a cautela de evitar conflitos com os pontos de vista que habitualmente ligamos à ideia de igualdade. Os seguintes pontos são essenciais:

1) A definição deve ser baseada nas funções psicométricas, uma vez que elas conteem todas as informações de que dispomos.

2) A definição deve indicar um valor precisamente definido, e não todo um intervalo de valores.

3) O ponto de igualdade subjetiva deve cair dentro do intervalo de incerteza. Somente este último itém necessita de alguma explicação. Os pontos que caem fora do intervalo de incerteza dão, quer ao julgamento mais leve, quer ao julgamento mais pesado, uma probabilidade com um excesso de 1/2. Não é admissivel dizer que duas quantidades são iguais, se houver uma probabilidade maior que 1/2 de que uma comparação entre elas resulte na percepção de uma diferença.

Um plano que parece promissor é o de usar as probabilidades dos julgamentos de igualdade para definir o ponto de igualdade subjetiva. Consideram-se os julgamentos de igualdade como uma classe empírica, cuja distribuição é dada pela função psicométrica G. A media e a moda são usadas mais frequentemente para caracterizar uma classe empírica. A media é encontrada pela forma habitual, partindo das frequencias dos julgamentos de igualdade apresentados na Tabela 1, e a moda é encontrada como sendo o máximo da função G. A moda corresponde ao mais alto ponto da curva que representa a função psicométrica dos julgamentos de igualdade, e dá o valor para o qual a probabilidade de um julgamento de igualdade é maior.

Estas definições foram experimentadas no tratamento dos resultados de experimentos de comparação de pesos semelhantes aos que figuram na Tabela 1, com sete observadores. Isto exigiu um total de 17.850 experimentos. O resultado foi negativo, pois verificou-se que nenhum destes valores tem uma relação definida com o intervalo de incerteza. Para alguns observadores a media, para outros a moda, caia fora do intervalo de incerteza. Daí podemos concluir que a definição do ponto de igualdade subjetiva não pode ser baseado nas probabilidades dos julgamentos de igualdade.

Baseamos nossa definição nas probabilidades dos julgamentos relativos à percepção de uma diferença e dizemos: o ponto de igualdade subjetiva é a quantidade para a qual as probabilidades dos julgamentos mais leve e mais pesado são iguais. Se **r**, **s**, e **t**, forem as probabilidades dos julgamentos mais leve, igual, e mais pesado respectivamente, o ponto de igualdade subjetiva é dado pela relação $\mathbf{r} = \mathbf{t}$.

O ponto de igualdade subjetiva definido por essa fórma, é o ponto em que as curvas representativas das probabilidades dos julgamentos mais pesado e mais leve fazem intersecção, e necessariamente teem que cair dentro do intervalo de incerteza. A experiência mostra que este ponto fica muito próximo do centro deste intervalo. A seguinte tabela prova este fato em relação aos experimentos de comparação de pesos realizados com sete sujeitos. A letra grega ξ designa o ponto de igualdade subjetiva definido como o valor para o qual as probabilidades dos julgamentos mais leve e mais pesado são iguais, e a letra C dá o centro do intervalo de incerteza calculado pela fórmula $1/2(S_1 + S_2)$.

Observador	S_1	S_2	ξ	C
I	96 34	96.68	96.64	96.51
II	95 08	99.27	97 23	97 18
III	97.91	99,39	98 66	98 65
IV	95 44	98 24	96 81	96 84
V	94 22	97.16	95.62	95.69
VI	95 20	100,75	98.07	98.02
VII	95.80	101 17	98 50	98 48

As diferenças entre os valores ξ e C são insignificantes. S. W. Fernberger, da Universidade de Pensilvania, continuou essas observações durante anos e coligiu dados relativos a várias centenas de observadores. Em cêrca de 75% dos casos, a coincidência destes dois valores é quasi completa e nos restantes 25% as diferenças são muito pequenas. Esta é a base experimental da seguinte proposição: **O centro do intervalo de incerteza é o ponto de igualdade subjetiva.**

11) O método das mínimas diferenças perceptíveis — O método das diferenças apenas perceptíveis é o processo mais velho e mais direto para medir a sensibilidade de um observador. É aplicavel quando existe um intervalo dentro do qual o observador não seja capaz de perceber uma diferença entre o estímulo padrão e o de comparação. Dentro deste intervalo, a probabilidade de um julgamento de igualdade é igual à unidade.

Iniciamos com um estímulo de comparação que, para o observador, parece igual ao padrão e, conservando constante este último, aumentamos o estímulo de comparação até que a diferença seja percebida. O menor estímulo que obtém o julgamento mais pesado, é uma determinação da diferença apenas perceptivel positiva. Então partimos de um estímulo de comparação que é julgado maior que o padrão e, conservando constante este último, diminuimos gradualmente a diferença até que os dois estímulos pareçam iguais. O maior estímulo de comparação que não obtém o julgamento maior, é uma determinação da diferença apenas imperceptivel positiva.

Pelo mesmo processo encontramos a diferença apenas perceptivel e imperceptivel negativa. Partindo de um estímulo julgado igual ao padrão, diminuimos gradualmente a diferença até que se chegue a um estímulo que obtem o julgamento "menor". O maior estímulo que obtém o julgamento "menor" é uma determinação da diferença apenas perceptivel negativa. Partindo de um estímulo julgado menor que o padrão, diminuimos a diferença até que se encontre um estímulo que seja julgado igual ao padrão. O menor estímulo, que não obtém o julgamento "menor" é uma determinação da diferença apenas perceptivel negativa.

A media entre as diferenças apenas perceptivel e apenas imperceptivel positiva é chamada: limite ou limiar na direção do aumento. A media das diferenças apenas perceptivel e apenas imperceptivel negativas é chamado limite ou limiar na direção do decréscimo. O termo limiar é uma expressão metafórica que tem uma longa história, na qual o pensamento científico e o metafísico aparecem curiosamente misturados. Essa historia não nos interessa neste contexto, e a nossa tarefa é interpretar o resultado do método das diferenças apenas perceptiveis em termos das probabilidades dos três julgamentos.

Para determinar a diferença apenas perceptivel positiva, usamos uma serie crescente de estímulos de comparação s_1, s_2, s_3 ... até alcançar um estímulo s_n, para o qual o observador profere o julgamento "maior". A obtenção do estímulo s_n como determinação da diferença apenas perceptivel positiva é um acontecimento compósito cuja probabilidade é encontrada pelo teorema da multiplicação do cálculo de probabilidade. É o produto das probabilidades de que os estímulos s_1, s_2, s_3, ... s_{n-1} será julgado igual ao padrão, multiplicado pela probabilidade de que para s_n o julgamento "igual" não seja dado. A última probabilidade citada é igual à probabilidade de um julgamento "maior", pois supõe-se que as funções psicométricas teem a fórma apresentada na Fig. 3. A probabilidade de que um valor dado será obtido como determinação da diferença apenas perceptivel positiva, evidentemente depende da escolha do ponto de partida s_1 e da extensão das etapas pelas quais aumentamos o estímulo de comparação.

Ao determinar a diferença apenas imperceptivel positiva, usamos uma série decrescente de estímulos, que acompanhamos até alcançar um valor que o observador julga igual ao padrão. A obtenção de um valor como determinação da diferença apenas imperceptivel é um acontecimento compósito cuja probabilidade é igual ao produto das probabilidades de que o primeiro estímulo será julgado maior que o padrão, multiplicado pela probabilidade de que o último estímulo seja julgado igual ao padrão.

Um raciocinio semelhante leva às fórmulas das probabilidades com que um dado estímulo seja obtido como determinação das diferenças apenas perceptiveis e apenas imperceptiveis negativas, respectivamente. Com base nessas probabilidades calculamos os valores das diferenças apenas perceptiveis e apenas imperceptiveis. O valor do limiar na direção do aumento ou do decréscimo, respectivamente, é encontrado como a média das diferenças apenas perceptiveis e apenas imperceptiveis, positivas e negativas respectivamente. Todos estes cálculos são baseados nas frequências observadas dos três julgamentos.

A discussão das fórmulas resultantes exige algum cuidado. A maioria das dificuldades é devida ao fato de que a escolha dos estímulos que usamos é arbitrária e de que desejamos obter conclusões gerais. Eis aqui as duas consequências mais importantes: a) as etapas pelas quais aumentamos ou diminuimos os estímulos de comparação não devem ser nem muito grandes, nem muito pequenas. Em caso de dúvida, é melhor fazê-las muito grandes, porque este erro será com certeza percebido, ao passo que diferenças extremamente pequenas são causa de erros que podem passar despercebidos; b) a determinação mais provavel do limiar na direção do aumento é o valor S_2 para o qual a probabilidade de um julgamento "maior" é igual a 1/2, e a determinação mais provavel do limiar de decréscimo é o valor S_1, para o qual a probabilidade do julgamento "menor" é 1/2.

O segundo ponto é importante. Em lugar de dar a prova matemática abstrata, que é longa e complicada, apresentaremos alguns fatos que mostram a identidade das quantidades S_1 e S_2 com os resultados do método das diferenças apenas perceptiveis. Os numeros apresentados na Tabela 1 nos permitem calcular as probabilidades com que cada um dos 7 pesos de comparação é encontrado como determinação das diferenças apenas perceptiveis e apenas imperceptiveis.

Um registro completo de todos os julgamentos proferidos nos permite encontrar os resultados que teriam sido obtidos, em identicas condições, pelo método das diferenças apenas perceptiveis. É mais facil encontrar a diferença apenas perceptivel positiva em uma série ascendente, mas o menor valor para o qual um julgamento "maior" é proferido, pode ser encontrado em qualquer série, seja qual fôr a sua ordem. Suponhamos que 7 comparações do padrão de 100grs. com os pesos de 84, 88, 92, 96, 100, 104 e 108grs., resultaram nos seguintes julgamentos:

84	88	92	96	100	104	108
=	l	h	h	=	h	h

onde as letras **l** e **h** significam respectivamente "mais leve" e "mais pesado". Nesta série

92 foi o menor estímulo que obteve o julgamento "mais pesado".
100 foi o maior estímulo que não obteve o julgamento "mais pesado".
88 foi o maior estímulo que obteve o julgamento "mais leve".
84 foi o menor estímulo que não obteve o julgamento "mais leve".

Procedendo a experimentos com esses sete pesos de comparação

92 foi a diferença apenas perceptivel positiva
100 foi a diferença apenas imperceptivel positiva
88 foi a diferença apenas perceptivel negativa
84 foi a diferença apenas imperceptivel negativa

Os dados dos 7 observadores foram tratados dessa fórma, e as medias das diferenças apenas perceptiveis e apenas imperceptiveis, negativas e positivas respectivamente, dá as quantidades S_1 e S_2. Esses dados são apresentados na tabela seguinte, nas colunas rubricadas "observado".

Observador	S_1	método das diferenças apenas perceptiveis		S_2	método das diferenças apenas perceptiveis	
		observado	calculado		observado	calculado
I'	93.34	93.49	93.30	99.68	99.60	99 45
II	95.08	94 98	94 87	99 27	98 71	98.83
III	97.91	97.88	97.85	99 39	99.58	99.28
IV	95.44	95 56	95.39	98.21	98.24	98.08
V	94 22	94.57	94.47	97 16	97.35	97.14
VI	95.29	95.20	95.31	100.75	100.33	99.86
VII	95.80	96.74	95.79	101.17	99.63	99 86

Estes números não deixam dúvida de que as quantidades determinadas pelo método das diferenças apenas perceptiveis são S_1 e S_2 limites superior e inferior do intervalo de incerteza.

12) **A medida da precisão** — O método das diferenças apenas perceptiveis pode ser variado por diversas fórmas. A variação mais importante é o processo seguido na mensuração das quantidades empíricas. O valor da quantidade desconhecida é encontrado após uma série de comparações nas quais uma diferença entre a quantidade e os valores da escala de medida foi observada. O observador eventualmente encontra um pequeno intervalo no qual não pode distinguir uma diferença entre as duas quantidades, e toma o centro deste intervalo como resultado da sua medida. Tomam-se várias medidas desse gênero, e a sua media é a determinação final da quantidade desconhecida.

Primeiro precisamos justificar o uso da media. É evidente que as fórmulas para o método das diferenças apenas perceptiveis se aplicam a este caso. Cada mensuração individual é uma determinação do centro do intervalo de incerteza. Tomar a media desses resultados não é um processo arbitrário, mas sim prescrito pelas regras do cálculo de probabilidade, pois uma das suas proposições diz que a média artimética é a melhor determinação de varias observações de uma quantidade definida por uma fórmula tal como a do centro do intervalo de incerteza.

O segundo ponto importante é a significação da expressão: precisão da mensuração. Explicá-lo-emos por meio de algumas considerações muito simples, que poderão ser compreendidas sem necessidade de fórmula alguma. Pedimos ao observador que registre os limites do intervalo dentro do qual não percebe diferença entre as duas quantidades, em vez de dar somente um valor para o ponto médio desse intervalo. Conservando separados os registros de S_1 e S_2, fazemos uma série de **n** observações e determinamos primeiro as medias dos limites mais alto e mais baixo do intervalo de incerteza, e depois o ponto de igualdade subjetiva, como ponto central entre S_1 e S_2. Este ponto seria o mesmo se tivéssemos ordenado ao observador que procedesse da maneira usual para tomar o centro do intervalo dentro do qual não se percebe diferença alguma entre as duas quantidades, como resultado de uma mensuração individual.

Desejamos caracterizar a distribuição de um grupo de mensurações dessa espécie, e escolhemos para isso o chamado erro medio. Este é encontrado como sendo a media dos desvios da mediana, tomados sem consideração de sinal. Temos que estabelecer os desvios dos resultados individuais do centro do intervalo de incerteza, e começar por considerar os resultados referente a S_1, limite inferior do intervalo de incerteza. Podemos obter esta media partindo dos resultados individuais, ou estabelecendo a media dos dados, que é igual a S_1 e subtraindo-a de ξ. O mesmo raciocinio se aplica aos resultados relativos ao limite superior do intervalo de incerteza e isto leva à conclusão: **O desvio medio é igual à metade do intervalo de incerteza.**

O desvio medio mantém uma relação bem conhecida com o coeficiente de precisão de Gauss, que é habitualmente usado na teoria dos erros de observação. Usando essa fórmula, verificamos que **o coeficiente de precisão de Gauss é inversamente proporcional ao intervalo de incerteza.** A teoria dos erros de observação baseia a medida da precisão sobre a mesma quantidade usada na psicofísica para medir a exatidão das percepções sensoriais. Medidas de diferente coeficiente de precisão relacionam-se da mesma maneira que o fariam se tivessem sido estabelecidas com orgãos dos sentidos de sensibilidade diferente.

Quando o ponto de igualdade subjetiva coincide com o centro do intervalo de incerteza, a probabilidade de que se verifique um julgamento de igualdade tem o seu máximo no mesmo ponto. Neste caso, a media aritmética, a mediana e a moda da função psicométrica dos julgamentos de igualdade coincidem.

O uso do método dos mínimos quadrados justifica-se no caso de mensurações nas quais uma quantidade empírica é comparada sucessivamente com uma série de valores de medida sistematicamente selecionados. As mensurações da astronomia, geodesia e física são dessa espécie. O nosso raciocinio não se aplica às formulas das distribuições das classes empíricas.

Gauss baseou a sua primeira dedução do método dos mínimos quadrados no costume dos astrónomos e agrimensores de tomar a media aritmética como a melhor determinação de uma série de observações relativas à mesma quantidade empírica. O nosso raciocinio se baseia sobre a análise psicológica do processo pelo qual atribuimos um número à quantidade medida. A teoria dos erros de observação contém um elemento empírico que é essencial e inevitavel.

O resultado da mensuração deve ser independente do observador e do seu ponto de vista. Satisfazemos esta última condição eliminando os erros constantes, isto é, dos fatores já conhecidos como capazes de influenciar o resultado em uma direção, quer positiva, quer negativa. Isto se faz dispondo as observações de maneira adequada ou corrigindo os resultados numéricos por meio de uma fórmula. A eliminação de erros constantes conhecidos terá êxito certo, se se tomarem as cautelas necessarias e não sobrevier algum incidente inesperado. A eliminação dos erros devidos à constituição psicofísica do observador não conta com idêntica probabilidade de êxito. Fernberger mostrou que a media, a mediana e a moda coincidem em cêrca de 75% dos observadores, mas não é possivel fazer uma afirmação geral relativamente aos restantes 25%, de maneira que dois observadores, medindo a mesma quantidade, podem conseguir resultados diferentes. Talvez o contacto constante com as minúcias da mensuração produza um tipo de mentalidade não emocional, que não favoreça quer os julgamentos "maior", quer os julgamentos "menor". Ha indicios de que essa suposição é verdadeira, mas ainda não é possivel ter certeza.

Composto e impresso na
Indústria Gráfica José Magalhães Ltda.
Rua Spartaco, 215
São Paulo

BOLETINS PUBLICADOS
PELA
CADEIRA DE PSICOLOGIA

N.º 1 — Otto Klineberg, *Introdução à Psicologia Social*, 1946 (esgotado).

N.º 2 — Annita de Castilho e Marcondes Cabral, *O Conflito dos Resultados dos Experimentos sôbre a Memória de Formas*, 1946.

N.º 3 — 1) Annita de Castilho e Marcondes Cabral, *A Psicologia no Brasil;*

2) Carolina Martuscelli, *Uma pesquisa sôbre aceitação de grupos nacionais, "raciais" e regionais, em São Paulo;*

3) Maria da Penha Pompeu de Toledo, *Ensáio de elaboração de uma técnica para o estudo psicanalítico quantificado de documentos pessoais e protocolos de testes projetivos;*

4) Dante Moreira Leite, *Conceitos morais em seis livros didáticos primários brasileiros;*

5) Dante Moreira Leite, *Preconceito racial e patriotismo em seis livros didáticos primários brasileiros;* 1950.

Compòsto e impresso na
Indúsria Gráfica JOSÉ MAGALHÃES LTDA.
Rua Spartaco, 215
São Paulo